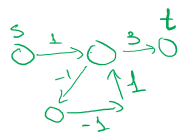


Кратчайшие пути в графах

$G(V, E)$ - ориент. или нет.
 $w_e - \forall e \in E$
 $e \in \mathbb{R}$

$\rho(v, u) = \min$ длина пути $v \rightarrow u$
 $\rho(v, u) = +\infty$ - пути $v \rightarrow u$ нет
 $\rho(v, u) = -\infty$ - путь существует, но отрицательный

dfs:



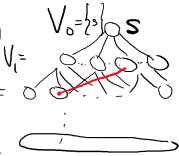
1) Поиск в ширину (BFS - breadth-first search)

Граф не взвеш. ($\forall w_e = 1$)

$V_d \in V: \forall v \in V_d \rho(s, v) = d$

$V_0 = \{s\}$

Remark $V_0, V_1, \dots, V_{|V|-1}, V_{|V|}$
 $\forall v \in V: \rho(s, v) = \infty$
 $\rho(s, v) = 1$



BFS(s): $d = [+\infty] \times |V|$; $q = \text{new Queue}()$

$d[s] = 0$; $q.push(s)$; $p[s] = -1$

while not $q.empty()$:

$v = q.pop()$

for $(vu) \in E$:

if $d[u] == +\infty$:

$d[u] = d[v] + 1$; $q.push(u)$

$p[u] = v$

Время работы: $\forall$ верш. обр. ≤ 1 раз $\rightarrow O(|V|)$

$\forall$ ребро обр. ≤ 2 раз $\rightarrow O(|E|)$

(матр. смежн.: $O(|V|^2)$)

Списки смежн.: $O(|V| + |E|)$

Память: $O(|V|)$

Th. После выполнения BFS(s) $\forall v \in V \ d[v] = \rho(s, v)$

Lm. $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, |V|\}$

Этот момент времени T_k :

- 1). $q = V_k$ (в каком-то порядке)
- 2). $\forall v: \rho(s, v) \leq k \Rightarrow d[v] = \rho(s, v)$
- 3). $\forall v: \rho(s, v) > k \Rightarrow d[v] = +\infty$

До-во Lm.

Индукция по k.

База: $k = 0$.

- 1). $q = \{s\}$
- 2). $d[s] = 0$
- 3). $d[v] = +\infty \forall v \neq s$

Переход: $k \rightarrow k+1$.

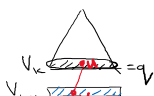
Расси. момент T_k .

Делаем итераци.

while, пока

в q не закончатся

вершины $u \in V_k$. Момент вр. после этого - T_{k+1} .



$\bullet v \in V_{k+1}. \exists p: s \rightarrow \dots \rightarrow u \rightarrow v, \rho(s, u) = k \Rightarrow u \in V_k \Rightarrow$ во время обр. u добавили v в q (или она уже добавлена)

2). По предп. инд., $\rho(s, v) \leq k \Rightarrow d[v] = \rho(s, v)$

$\rho(s, v) = k+1 \Rightarrow v \in V_{k+1} \Rightarrow$ мы её сейчас ($[T_k, T_{k+1})$) добавили в q $\Rightarrow d[v] = k+1$

3). Поменяли $d[v]$ только у вершин $u \in V_{k+1} \Rightarrow \forall v \rho(s, v) > k+1$ осталось $d[v] = +\infty$.



Следствие $|k| = |V|$ в Lm.

Обработаны все вершины, у кот. $\rho(s, v) < |V|$,

т.е. те вершины, до кот. $\exists$ путь $s \rightarrow v$.

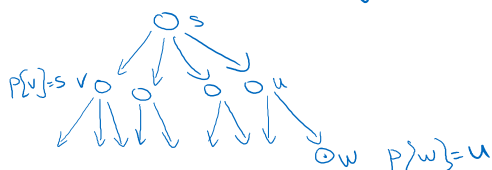
У них по п. 2 правилом пометили $d[v] = \rho(s, v)$.

У остальных по п. 3 $d[v] = +\infty$.

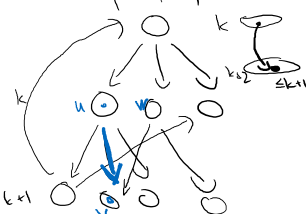
По п. 1 очередь пуста, т.е. алгоритм завершится в этот момент.

т.е. верна Th. о корректн. BFS.

Деревья кратчайших путей:



ор. граф



неор. граф

1). древесные рёбра $(\rho[s], v)$

2). рёбра $u \rightarrow v$ уровня k в уровень k+1

3). рёбра внутри уровня

4). обратные рёбра

1) - "

2) - "

3) - "

4) - "