

Минимальные остовные деревья (Minimal Spanning Trees)

$G(V, E)$ - неориентиров.
 $w_e \geq 0$

Задача: выбрать $E' \subseteq E: \begin{cases} w(E') \rightarrow \min \\ G(V, E') - \text{связен} \end{cases}$

Чтб. G - дерево. (связный граф без циклов)

Лемма (лемма об обратном ребре, лемма о разрезе)
 $\forall S \subseteq V, X \subseteq E: \exists \text{ MST} \ni X$
 $\forall v \in S, u \notin S (vu) \notin X \text{ [X не пересекает разрез]}$
 $\exists e_0 = (v_0, u_0) \forall v \in S, u \notin S, w_{e_0} = \min_{\substack{v \in S \\ u \notin S \\ (vu) \in E}} w_{vu}$

Тогда $\exists \text{ MST} \ni X \cup \{e_0\}$.

До-во. $T \ni \text{MST}, T \supseteq X$. 1) $T \ni e_0 \Rightarrow \text{OK}$

2) $T \not\ni e_0$.

Чтб. $\exists e_1 \in T: v_1 \in S, u_1 \notin S$

T - связно $\Rightarrow \exists$ путь p $v_0 \in S, u_0 \notin S \Rightarrow$ он пересекает разрез $\Rightarrow \exists$ ребро. Показали e_1 как любое ребро этого пути, пересекающее разрез.

$e_1 \neq e_0, e_1 \in T, e_0 \notin T$

$w_{e_0} \leq w_{e_1}$

Пусть $T' = T \setminus \{e_1\} \cup \{e_0\}$.

T' - дерево

$|T'| = |T| - 1 + 1 = |T| = N - 1$

Путь $v_1 \rightarrow u_1: v_1 \rightarrow v_0$ по пути $p, v_0 \rightarrow u_0$ по ребру $e_0, u_0 \rightarrow u_1$ по пути p

T' - связно

$w(T') = w(T) - w_{e_1} + w_{e_0} \leq w(T) = w(\text{MST}) \Rightarrow T' = \text{MST}$

$T' \ni X \cup \{e_0\}$

1) $T' \ni e_0$.

2) $T' \not\ni e_0, e_1 \notin X$, т.к. $\forall X$ нет ребер, пересекающих разрез

$T \setminus \{e_1\} \supseteq X \Rightarrow T \supseteq X$

Алгоритм Прима

$d[v] = 0, d[u] = \infty$

q. insert $(d[v], v)$; // очередь с приорит.

while not q.empty():

$v = q.\text{extract_min}()$

for $(vu) \in E$:

if $w_{vu} < d[u]$:

$d[u] = w_{vu}$ $p[u] = v$

change-key $(u, d[u])$

$O(V^2)$

$O(E \log V)$ ← очередь стр. на массбве

← на куче

Алгоритм Краскала

1) sort E по w_e

2) for $e = (vu) \in E$: (в отсор. порядке)

if v и u в разных комп. связности:

answer $+= e$

Корректности: все предлагаемые ребра (как ребра, так и нет)

соед. пары вершин из одной комп. связности

$\Rightarrow$ они не пересекают разрез

Все следующие имеют не меньший вес.

Система непересекающихся мн-в. (disjoint set union, DSU)

(HNU)

• init(n): создать n элементов, каждый в своём мн-ве

• get(x): возвращает цвет мн-ва, в кот. лежит x

• link(c_1, c_2): объедин. мн-ва цвета c_1 и c_2

• union(x_1, x_2): объедин. мн-ва, в кот. лежат x_1 и x_2

union(x_1, x_2):

$c_1 = \text{get}(x_1)$

$c_2 = \text{get}(x_2)$

link(c_1, c_2)

link(c_1, c_2):

if $c_1 = c_2$: return

...

...

① Массив

init(n):

for i in range(n):

$c[i] = i$

$O(1)$

get(x):

return $c[x]$

$O(n)$

link(c_1, c_2):

for i in range(n):

if $c[i] = c_1$:

$c[i] = c_2$

$O(m + n) = O(n^2)$

② Случаемые вектора/списки

init(n):

for i in range(n):

$c[i] = i$

lst[i] = []

$O(1)$

get(x):

return $c[x]$

$O(\min(|\text{lst}[c_1]|, |\text{lst}[c_2]|))$

link(c_1, c_2):

if $|\text{lst}[c_1]| >$

$|\text{lst}[c_2]|$:

$c_1, c_2 = c_2, c_1$

for x in lst[c₂]:

$c[x] = c_1$

lst[c₁] = lst[c₂]

lst[c₂] = []

$O(|\text{lst}[c_2]|)$

→

→

→

Time =

$\sum_{i=1}^n$

Time(link_i)

=

$\sum_{x=1}^n$

(# операций с x)

$\leq O(\sum_{x=1}^n \log n)$

= $O(n \log n)$

ср. время работы

(аморт.) $(n) \cdot \text{link}$

Time

$= O(\log n)$

n-1

Чтб: если c элементом x что-то происходило,

то размер его мн-ва увеличился в 2 раза.

$|\text{lst}[c_2]| \rightarrow |\text{lst}[c_2]| + |\text{lst}[c_1]| \geq 2 \cdot |\text{lst}[c_2]|$

$\Rightarrow$ c в элементе произойдёт $\leq \log_2 n$ операций

Лес непересекающихся деревьев (мн-в)

• init(n):

for i in range(n):

$p[i] = i$

$r[i] = 0$

• get(x):

if $x = p[x]$: return x

else return get($p[x]$);

$O(n)$

↓ эвристика статус

пути

get(x):

if $x = p[x]$: return x

else: $p[x] = \text{get}(p[x])$

return $p[x]$

• link(c_1, c_2):

$p[c_2] = c_1$

$O(1)$

↓ эвристика рангов

link2(c_1, c_2):

if $r[c_2] < r[c_1]$:

$p[c_2] = c_1$

else:

$p[c_1] = c_2$

if $r[c_1] == r[c_2]$:

$r[c_2] += 1$

Time = $O(n + m \log^* n)$

$n = 2^{5536}$

$\log^* n = 4$