Кратчайшие пути

w_e – произв.

Алг. Форда-Беллмана $s \to$ все ост.

$d[k][v]$ = min длина пути $s \to v$, кот. состоит из $\le k$ рёбер

ФБ-1

$d[0][s] = 0$, $d[0][v \ne s] = +\infty$

for $k = 0 .. |V|-2$:
  $d[k+1] = d[k]$ // $\forall v\ d[k+1][v] = d[k][v]$
  for $e = (uv) \in E$:
    $d[k+1][v] = \min(d[k+1][v], d[k][u] + w_e)$

Time = $O(VE)$
Mem = $O(V^2)$

ФБ-2

$d'[s] = 0$; $d'[v \ne s] = +\infty$

for $k = 0 .. |V|-2$
  for $e \in (uv) \in E$
    $d'[v] = \min(d'[v], d'[u] + w_e)$

Mem = $O(V)$

<u>Утв.</u> Вконце работы ФБ-2 $\forall v$ $d'[v] = \rho(s,v)$.

① $\forall v$ в любой момент $d'[v] \ge \rho(s,v)$

② Вконце итерации $k = k_0$ $\forall v$ $d'[v] \le d[k_0+1][v]$.

<u>Следствие.</u> Вконце итерации $k = |V|-2$: $\forall v$ $\rho(s,v) \overset{①}{\le} d'[v] \overset{②}{\le} d[|V|-1][v] = \rho(s,v) \Rightarrow d'[v] = \rho(s,v)$

Д-во ②: $k = k_0$:

$d'[v] = \min(d'[v], d'[u] + w_e)$,

т.е. $d'[v] = \min(\underbrace{d'[v]}_{\text{после } k_0-1 \text{ итерации}},\ \min\limits_{e=(uv)\in E} d'[u] + w_e)$

по п.и. $\le d[k_0][v]$; по п.и. $\le d[k_0][u]$

$d[k_0+1][v] = \min(d[k_0][v], \min\limits_{e=(uv)\in E} d[k_0][u] + w_e)$

$\Rightarrow d'[v] \le d[k_0+1][v]$ (т.к. берём min из чисел, кот. $\le$)

■

Отр. циклы: делаем не $|V|-1$ итерацию, а $|V|$ итераций
Если на итерации #$|V|$ что-то обновилось, то есть цикл отриц. стоимости.

Алгоритм Флойда-Уоршелла:

$d[k][v][u]$ = min длина пути $v \to u$, используя в качестве промежут. вершин только $\{1, 2, .., k\}$

$d[3][2][5]$ = min длина пути $2 \to 5$, кот. может исп. верш. 1, 2, 3

$\forall v\ d[0][v][v] = 0$ (аккуратно с отриц. петлями)

$\forall e = (vu) \in E$ $d[0][v][u] = w_e$
$\forall v \ne u, (vu) \notin E$ $d[0][v][u] = +\infty$

ФУ-1

for $k = 1 .. |V|$
  for $v \in V$
    for $u \in V$
      $d[k][v][u] = \min(d[k-1][v][u], d[k-1][v][k] + d[k-1][k][u])$

Time = $O(V^3)$ Mem = $O(V^3)$

ФУ-2 for $k = 1 .. |V|$
  for $v \in V$
    for $u \in V$
      $d'[v][u] = \min(d'[v][u], d'[v][k] + d'[k][u])$

<u>Утв.</u> ФУ-2 считает $\rho(v,u) = d'[v][u]$ $\forall v, u$.

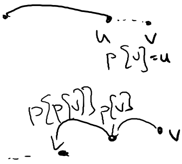
① $d'[v][u] \ge \rho(v,u)$ всегда

② $d'[v][u] \le d[k_0][v][u]$ после итерации $k = k_0$

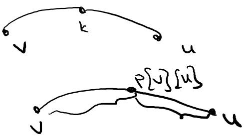
$d'[v][u] = \min(\underbrace{d'[v][u]}_{\text{посчит. на итер. } k=k_0-1}, \underbrace{d'[v][k]}_{\text{посчит. на итер. } k=k_0-1 \text{ или } k_0} + d'[k][u]) \le d[k_0][v][u]$

по п.и. $\le d[k_0-1][v][u]$; $\le d[k_0-1][v][k]$; $\le d[k_0-1][k][u]$

■



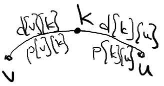
1).



$p[v][u] = k$

$p[v][u]$

2).



$p[v][u]$ – предпосл. верш. $v \to u$

if $d[v][k] + d[k][u] <$ $d[v][u]$:
  $d[v][u] = \ldots + \ldots$
  $p[v][u] = p[k][u]$

Отриц. циклы: $\exists$ отр. цикл $\Leftrightarrow \exists v: d[v][v] < 0$.