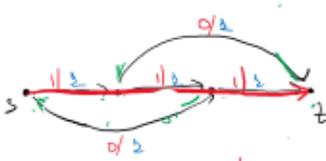
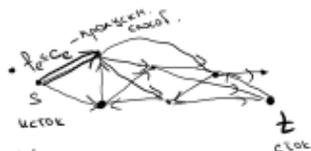


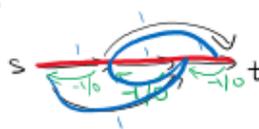
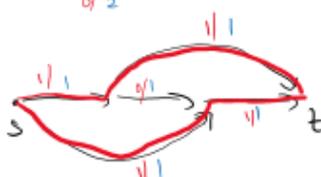
Потоки в графах (Flow)



c_e



$\forall v \neq s, t$
 $\sum_{e \in \text{in}(v)} f_e = \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e$
 Баланс потока = $\left(\sum_{(s,u) \in E} f_e - \sum_{(u,s) \in E} f_e \right)$

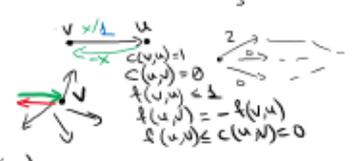


$f(u,v) = -f(v,u)$

Транспортная сеть - $G(V,E)$ (ор. или неор.)

- s - источник, t - сток
- $s, t \in V, s \neq t$
- $c: V^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $f: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Безумная потоки. $|f| = \sum_{u \in V} f(s,u) \rightarrow \max$



Дано: G, s, t, c
 Найти: f т.ч. $|f| \rightarrow \max$

Rem: $(v,u), (u,v) \notin E \quad \left. \begin{matrix} f(v,u) \leq c(v,u) = 0 \\ f(u,v) \leq c(u,v) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$

Def: $S, T \subseteq V. \quad F(S,T) = \sum_{\substack{a \in S \\ b \in T}} f_{ab}$
 $C(S,T) = \sum_{\substack{a \in S \\ b \in T}} c_{ab}$



Lm. $F(S,T) \leq C(S,T)$
 Д-во. $\forall f_{ab} \leq c_{ab}$ (cb-by 2).

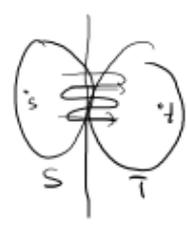
Lm. $\forall S \quad F(S,S) = 0$
 Д-во. $\sum_{\substack{a \in S \\ b \in S}} f_{ab} = \sum_{\substack{a \in S \\ b \in S}} (f_{ab} + f_{ba}) = 0$
 = 0 по cb-by 1

Lm. $\forall v \in V \quad F(\{v\}, V) = \begin{cases} |f|, & v = s \\ -|f|, & v = t \\ 0, & v \neq s, t \end{cases}$

Д-во. $v = s: |f| = \sum_{u \in V} f(s,u) = F(\{s\}, V)$
 $\forall v \neq s, t: F(\{v\}, V) = \sum_{u \in V} f(v,u) = 0$ (по cb-by 3) & v не источник

$v = t: F(V, \{t\}) = 0$
 $F(\{s\}, V) + F(\{t\}, V) + \sum_{v \neq s, t} F(\{v\}, V) = 0 \Rightarrow F(\{t\}, V) = -|f|$

Def. $S, T \subseteq V \quad \left\{ \begin{matrix} S \cap T = \emptyset \\ S \cup T = V \end{matrix} \right. \Rightarrow (S,T)$ - разрез G



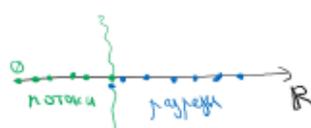
Безумная $(S,T) - C(S,T) = \sum_{\substack{a \in S \\ b \in T}} c_{ab}$

Lm. (S,T) - разрез $\Rightarrow |f| \leq C(S,T)$

Д-во. $F(S,T) = F(S, T) + F(S, S) = F(S, V) = F(\{s\}, V) + \sum_{\substack{v \in S \\ v \neq s}} F(\{v\}, V) = |f| + 0 = |f|$

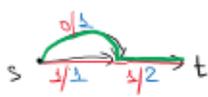
Lm. (S,T) - разрез $\Rightarrow |f| \leq C(S,T)$

Д-во. $|f| = F(S,T) \leq C(S,T)$



Th. (Полга-Панкратова)

- $|f| = \max \Leftrightarrow \exists$ гон. путь $s \rightarrow t$
- $\max |f| = \min_{(S,T)\text{-разрез}} C(S,T)$



Д-во. \exists гон. путь $s \rightarrow t \Rightarrow |f| \neq \max$ (т.к. поток можно увеличить)

гон. путь $s \rightarrow t$ - путь из $s \rightarrow t$ такой, что $\forall e$ на пути $e \in E, c_e > f_e$

\nexists гон. путь $|f| = F(S,T) = C(S,T)$
 $\sum_{\substack{a \in S \\ b \in T}} f_{ab} = \sum_{\substack{a \in S \\ b \in T}} c_{ab}$
 $S = \{v \mid s \rightarrow v \text{ можно пойти по ребрам } c_e > f_e\}$
 $T = V \setminus S, t \in T$
 $|f| = C(S,T) \Rightarrow |f| = \max$
 $\sum_{e \in W} f_e - \sum_{e \in V} f_e = 0$

Алг. Полга-Панкратова: найти гон. путь $s \rightarrow t$ с помощью dfs
 Если все $c_e \in \mathbb{Z} \Rightarrow O(E) \times |f| = O(|E| \cdot |f|)$

dfs(v):
 if (v == t) return true
 used[v] = 1
 for e = (v,u) in E:
 if c(v,u) > f(v,u) and !used[u]:
 dfs(u)
 (v,u) in E $\Rightarrow c(v,u) = 0$