

# Вопросы к экзамену по алгоритмам

## СПб ВШЭ, 1 курс, осень 2020, зимний экзамен

### Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик и дз.
- Курсивом помечено то, что было разобрано на практике.
- (+) Факультативные знания.

### Кучи

1. Кучи. Биномиальная куча.
2. Куча Фибоначчи. Add и Merge за  $O(1)$ . Алгоритм для DecreaseKey.
3. Куча Фибоначчи. Доказательство времени работы.

### Динамическое программирование

4. ДП. Вперёд, назад, лениво. Восстановление ответа. Задача о «числе путей с прыжком на 3, 4 или 5». Ациклический граф состояний. Формулировка задачи в терминах графа.
5. ДП. Задача про путь на матрице с дырками. Min путь, количество путей.
6. ДП. Задача о рюкзаке. Без стоимостей за  $O(nW)$  времени,  $O(W)$  памяти, с восстановлением ответа. Применение битсетов. *Рюкзак со стоимостями и его решение*. Проблемы с восстановлением ответа.
7. Задача НОП. Восстановление ответа с ссылками назад и без них. Оптимизация памяти если нет восстановления ответа.
8. Оптимизация памяти для НОП через битсет.
9. Хиршберг. Восстановление ответа в НОП за  $O(n^2)$  времени и  $O(n)$  памяти. *Хиршберг для рюкзака*.
10. ДП. *Трёхсторонний путь по матрице мин веса* (“министерство”). Оптимизация памяти до  $O(n\sqrt{m})$
11. ДП. *Задача LCP, задача расстояние Левенштейна*.
12. Задача НВП. Решение за  $O(n^2)$ , решение за  $O(n \log n)$ .
13. Динамика-процесс или измельчение перехода. Задача про погрузку кораблей за  $O(n^4)$ ,  $O(n^3)$ ,  $O(n^2)$ .
14. Оптимизация ДП через возведение матрицы в степень. *Линейные рекурренты*. Количество путей длины  $k$  в графе.
15. Задача про почтовые отделения, решение за  $O(n^2k)$ .
16. Оптимизация Кнута и оптимизация методом “разделяй и властвуй”. Почтовые отделения.
17. ДП. Подотрезки. Расстановка скобок в умножении матриц. Восстановление ответа.
18. ДП. *Поддеревья*. *Максимальное по весу паросочетание в дереве*.

### Комбинаторика и подмножества

19. Комбинаторика. Следующий, предыдущий объект. Перестановки и скобочные последовательности.
20. Комбинаторика. Объект по номеру и номер по объекту. Перестановки и скобочные последовательности.
21. *Подсчёт числа разбиений на слагаемые*. *Упорядоченные, неупорядоченные*.
22. Операции с множествами как с  $n$ -битными числами. Количество бит в числе за  $O(2^n)$ , сумма на подмножестве за  $O(2^n)$  (через перебор и через старший бит).
23. Гамильтонов путь и цикл за  $O(2^n n)$ .
24. Переборы подмножеств и надмножеств. Раскраска вершин графа в минимальное число цветов за  $O(3^n + 2^n)$ . Проверка независимости всех множеств за  $O(2^n)$ .
25. Раскраска вершин графа в минимальное число цветов за  $O(2.44^n)$ .

26. *Set Cover* (два решения).
27. Meet-In-The-Middle. Рюкзак. Два способа для клик.
28. Динамика по скошенному профилю. Замощение доминошками.

## Графы

29. Способы хранения графа. Матрица смежности, список смежности, мультисписок.
30. Определения: граф, орграф, путь, цикл, простой путь/цикл, ациклический граф, дерево, степень вершины, компоненты связности и сильной связности.
31. dfs. Простая версия, поиск компонент связности, поиск пути в графе, проверка на двудольность.
32. dfs и остовное дерево. Классификация типов рёбер. Отсутствие перекрёстных рёбер в неорграфе.
33. dfs. Поиск цикла. Алгоритм для неорграфа с пометками, общий алгоритм с цветами вершин. Доказательства корректности (доказательство того, что dfs посещает всё достижимое; доказательство что найдём какой-то цикл если он есть).
34. Топологическая сортировка. Два алгоритма построения.
35. dfs. Компоненты сильной связности. Алгоритм за  $\mathcal{O}(VE)$ .

## Дополнительно

- (+) 36. Доказательство неравенств на  $p[n][k]$  для почтовых отделений.
- (+) 37. Формула включений-исключений. Путь по матрице без ям. Число чисел взаимнопростых с  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Покраска графа в  $k$  цветов за  $\mathcal{O}(2^n \text{poly}(n))$ . Мёбиус. Число наборов чисел с фиксированным НОК.