$[f(v,v)=0\ \forall v]$

Потоки

$G(V,E)$

4). $c(v,u)\geq 0$; $(v,u)\notin E \Rightarrow c(v,u)=0$

2). $f(v,u)\leq c(v,u)$

1). $f(v,u)=-f(u,v)$

3). $\sum\limits_{u\in V} f(v,u)=0 \quad \forall v\neq s,t$

$|f| \overset{def}{=} \sum\limits_{u\in V} f(s,u)$

$S,T\subseteq V \quad F(S,T)\overset{def}{=}\sum\limits_{\substack{v\in S\\ u\in T}} f(v,u)$

$C(S,T)\overset{def}{=}\sum\limits_{\substack{v\in S\\ u\in T}} c(v,u)$

<u>Lm.</u> $F(\{v\},V)=\begin{cases}0, & v\neq s,t \quad (3)\\ |f|, & v=s \quad (\text{опр. } |f|)\\ -|f|, & v=t\end{cases}$

$\square$ $F(\{t\},V)=\sum\limits_{u\in V} f(t,u)=x$

$F(\{s\},V)=|f|$

$F(V\setminus\{s,t\},V)=\sum\limits_{v\neq s,t}F(\{v\},V)=0$

$0=\sum\limits_{\{v,u\}} f(v,u)+f(u,v)=\sum\limits_{\substack{v\in V\\ u\in V}} f(v,u)=F(V,V)=x+|f|+0 \Rightarrow x=-f$ $\blacksquare$

<u>Lm.</u> $\forall S\subseteq V \quad F(S,S)=0$

<u>Lm.</u> $F(S,T)\leq C(S,T)$

$\sum\limits_{\substack{v\in S\\ u\in T}} f(v,u) \leq \sum\limits_{\substack{v\in S\\ u\in T}} c(v,u)$

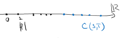
<u>Def.</u> Разрез — (S,T): $S\sqcup T=V$; $s\in S$, $t\in T$

Величина разреза — $C(S,T)$

<u>Lm.</u> (S,T) — разрез. Тогда $F(S,T)=|f|$.

$F(S,T)=F(S,T)+\underbrace{F(S,S)}_{=0}=F(S,V)=\sum\limits_{v\in S}F(\{v\},V)=F(\{s\},V)+0+\ldots=|f|.$ $\blacksquare$

<u>Lm.</u> (S,T) — разрез. $\forall f\ |f|\leq C(S,T)$. — величина разреза.



<u>Th.</u> (Форд, Фалкерсон)

1). $|f|$ — max $\Leftrightarrow \nexists$ доп. путь (путь в G_f: $\forall e\ c_e>0$) $s\to t$

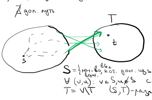
2). $\max|f|=\min\limits_{S\sqcup T=V} C(S,T)$ (макс. поток равен min разрезу)

<u>Д-во</u>

1). $\exists$ доп. путь. $\Rightarrow$ увеличим поток по нему $\Rightarrow$ $|f|$ был не max

$\nexists$ доп. путь

G_f:



$S=\{$мн-во верш., кот. дост. из s по e: $c_e>0\}$ в G_f

$\forall (v,u)$: $v\in S, u\notin S$ $\quad c(v,u)=0$

$T=V\setminus T \quad (S,T)$ — разрез $\quad s\in S, t\in T \quad |f|\leq \underbrace{C(S,T)}_{=0}$

$\Leftarrow$ поток максимален

G: $\quad S=\{$мн-во верш. в G, кот дост. из s по e: $c_e>f_e\}$

$s\in S \qquad \forall (v,u)\ v\in S, u\notin S \quad c(v,u)=f(v,u)$

$t\notin S$, т.к. $\nexists$ доп. путь

$T=V\setminus S \qquad (S,T)$ — разрез $\Rightarrow \forall f'$ — поток

$|f'|\leq C(S,T)=\sum\limits_{\substack{v\in S\\ u\in T}} c(v,u)=$

$=\sum\limits_{\substack{v\in S\\ u\in T}} f(v,u)=F(S,T)=|f|$

$\Rightarrow |f|$ — max

(Сразу научились строить по max f разрез (S,T): $|f|=C(S,T)$)

верен п.2) $\Leftarrow$ $\blacksquare$

Алгоритм Форда-Фалкерсона:

```
while(dfs(s)): //ищет путь s->t по рёбрам e: c_e>f_e
    | пускаем поток по этому пути
```

Если выйдем из while $\Rightarrow$ поток max.

Целочисл. сеть — $\forall c(v,u)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\Rightarrow$ на $\forall$ итерации пускаем ≥ 1 потока

$\Rightarrow Time\leq O(\underbrace{|f|}_{\text{велич. max потока}}\cdot E)$

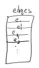
```
vector<Edge> edges[V];      struct Edge{ int b, f, c, rev}
                                          (a->b)
```

Обр. ребро: $e\to$ edges[e.b][e.rev]

```
struct Edge{int b, f, c;}
int next[MAX_E];
      next[e] -> следующее ребро
int head[V];   head[v] -> номер первого ребра
vector<Edge> edges;
изначально: head[v] = -1 ∀v
add(v, Edge e):
    | edges.push_back(e)
    | id = edges.size() - 1;
    | next[id] = head[v];
    | head[v] = id
```

add(v, e)
add(u, e')

Обр. ребро: id^1



Алг. Ф-Ф.:

```
bool dfs(v):
    used[v] = True;  if (v == t) return True;
    for(int id = head[v]; id != -1; id = next[id]):
        | auto e = edges[id];
        | if(e.f < e.c && !used[e.b] && dfs(e.b))
        |     | e.f += 1; edges[id^1].f -= 1;
        |     | return true;
    return False
```

$m=\min\limits_{e\text{-пред.}}(c_e-f_e)$

сток

m

Можно возвр. int — сколько получ. пустить

$\boxed{\texttt{while (dfs(s));}}$

<u>Lm.</u> f_2 — поток в G_{f_1} $\Rightarrow$ f_1+f_2 — поток в G

$f_1(v,u)+\underbrace{f_2(v,u)}_{\leq \underbrace{c(v,u)-f_1(v,u)}_{c_{G_{f_1}}(v,u)}}\leq c(v,u)$

<u>Lm.</u> f_1, f_2 — потоки в G. Тогда:

1). f_1-f_2 — поток в G_{f_2}

2). $|f_1-f_2|=|f_1|-|f_2|$

1). $f_1(v,u)-f_2(v,u)\leq c_{G_{f_2}}(v,u)=c(v,u)-f_2(v,u)$

$\blacksquare$

<u>Следствие.</u> $|f_1|=|f_2|$. $\quad f_1-f_2$ — $\underbrace{\text{поток величины } 0}_{\text{циркуляция}}$ в G_{f_2}

Алгоритм Эдмондса – Карпа

$T=O(VE^2)$ (для любой сети)

<u>Следствие</u> max f $\exists$ $\forall$ сети.

```
while (bfs(s)) //ищет кратч. путь из s в t по e: c_e>f_e
                                        (# рёбер)
(*) | пустить поток по этому пути p
    | (максимально сколько можно)
```

$\min\limits_{e\in p}(c_e-f_e)$

<u>Lm 1.</u> $G_{f_0}\xrightarrow{(*)}G_{f_1}$

$d_0[v]=\rho_{G_{f_0}}(s,v) \qquad d_1[v]=\rho_{G_{f_1}}(s,v) \qquad$ //то, что ищет bfs

Тогда $\forall v \quad d_1[v]\geq d_0[v]$.

$\square$ От противного. Выберем v: $\begin{cases}d_1[v]<d_0[v]\\ d_1[v]-\min\end{cases}$.

$(v=s\Rightarrow d_0[v]=d_1[v]=0)$

G_{f_1}: $\quad \underbrace{s\to\ldots\to x\to v}_{\text{длина пути} - d_1[v]}$ $\qquad d_1[x]<d_1[v]\Rightarrow d_1[x]\geq d_0[x]$ (т.к. v – min по $d_1[v]$)

$d_0[v]>d_1[v]=d_1[x]+1\geq d_0[x]+1 \Rightarrow$ ребра $x\to v$ в G_{f_0} не было! (от противного. $d_0[v]\leq d_0[x]+1$ (?!))

Значит, в пути p (кратч. путь в G_{f_0}) есть ребро $v\to x$. $\Rightarrow d_0[x]=d_0[v]+1$

$d_0[v]>d_1[v]=d_1[x]+1\geq d_0[x]+1=d_0[v]+2$

по выбору v

x – пред. верш. в пути $s\to v$ G_{f_1}

по „min" v $(d_1[x]<d_1[v])$

в p есть ребро $v\to x$, т.к. $d_0[v]>d_0[x]+1$

$\blacksquare$

На каждой итерации ЭК насыщ. ≥ 1 ребро. $(c_e=f_e)$, т.к. пускаем $\min\limits_{e\in p}(c_e-f_e)$

<u>Lm 2.</u> $\forall e\in E$ за весь алгоритм ЭК будет насыщено $\leq O(V)$ раз.

<u>Д-во.</u>

$v \xrightarrow{e} u$ (1) $c_e=f_e$ (насытили) $\quad d_0[u]=d_0[v]+1$ (перед (1))

$d_0[u]=d_0[v]+1$

(2) пустили поток по e' (u,v) $\quad d'[v]=d'[u]+1$ (перед (2))

$c_e=f_e$ (насытили)

$\underline{d'[v]}=d'[u]+1\underset{(L1)}{\geq} d_0[u]+1=\underline{=d_0[v]+2}$

Заметим, что $d[v]\leq|V|$ всегда (или $+\infty$)

$\Rightarrow e$ насыщ. $\leq\frac{|V|}{2}$ раз. $\blacksquare$

ЭК работает за $\leq\sum\limits_{e\in E}(\#\text{ насыщ. } e)\leq\frac{|V|\cdot|E|}{2}$ итераций

$Time=O\left(E\times\frac{VE}{2}\right)=O(VE^2)$.

масштабирование

ФФ	$\lvert f\rvert\cdot E$	$E^2\log U$
ЭК	VE^2	
Диниц	V^2E	$VE\log U$

```
for(min_w = 2^k; min_w >= 1; min_w /= 2)
    while (dfs(s, min_w));
```

$\}\leq 2E$ раз $\forall$ итерации

$2^k\geq\max(c_e)$

e: $c_e-f_e\geq$ min_w

$\min\limits_{e\in p}(c_e-f_e)\geq$ min_w

$f_i \quad G_{f_i} \xrightarrow{\geq 2^{i-1}} G_{f_{i-1}}$

min_w $=2^i$

Пустили на итер. $i-1$: $f_{i-1}-f_i$ — поток в G_{f_i}

В G_{f_i} есть разрез (S,T): $C(S,T)<E\cdot 2^i$

$\Rightarrow$ поток в G_{f_i} $<E\cdot 2^i$

$\Rightarrow$ путей найдём $<\frac{E\cdot 2^i}{2^{i-1}}=2E$

$Time=\#\text{итер.}\cdot 2E\cdot time(dfs)=$

$=\log U\cdot 2E\cdot O(E)=O(E^2\log U)$