Потоки

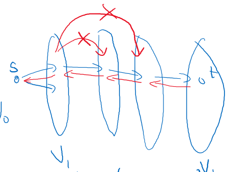
алг.: Эдмондса-Карпа: while(bfs(s,t)) пускаем путь $\le (VE)$ раз $\qquad \forall v\ d[v]\uparrow$

Time $= O(VE^2)$

Алгоритм Диница: $O(V^2E)$

Lm. $V_0, V_1, \dots, V_d$ — слои графа
$d_t=\rho(s,t)$ $\quad s\in V_0,\ t\in V_d$
Пока $\exists$ кр. путь $s\to t$ длины d_t
он имеет вид $s=v_0\in V_0, v_1\in V_1, \dots, v_d=t\in V_{d_t}$

□ 1). Первый раз d_t => очевидно
2). Не появилось ребер $V_i \to V_{\ge i+1}$
=> не будем ходить по ребрам $V_i\to V_{\le i-1}$.



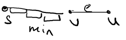
$V_i=\{v\in V \mid \rho(s,v)=i\}_{0}^{V_{d_t}}$

$d_t=\rho(s,t)\uparrow$

Как найти все пути длины d за $O(E+d\,k_d)$, где k_d = # путей длины d
— рассм. только ребра (v,u): $d[u]=d[v]+1$
— если через ребро не нашлось пути, выкидываем его

num {int, double}

```
num dfs(int v, num can=+∞): if v==t return can;
  while (head[v] != -1):
    Edge &e = edges[head[v]];
    if (d[e.to] == d[v]+1 and e.f < e.c):
      x = dfs(e.to, min(can, e.c - e.f))
      if (x > 0):
        e.f += x, edges[head[v]^1] -= x
        return x
    head[v] = e.next;
  return 0;
```



Rem. Пометки used не нужны

Алг. Диница: while(bfs(s,t)):
  while(dfs(s,t)>0): pass;
  восстанавливаем граф (head)

Rem dfs можно написать так, чтобы за один dfs пустить сразу все потоки на этой фазе.

Время работы dfs-ов на одной фазе: $\sum^{\#dfs}(\underbrace{x_i}_{\text{фр. ребра}}+\underbrace{d}_{\text{ребра дол. пути } s\to t}) \le E+(\#dfs)\cdot d = O(E+k_d\cdot d)$

Time $= \sum_{\text{фазам}}(E+dk_d) \le VE+\sum \underbrace{d}_{\le V} k_d \le VE + V\underbrace{\sum k_d}_{} = O(V^2E)$

$d_t\uparrow$
$d_t\le |V|-1$

Эк: $O(VE)$

Алг. Диница с масштабированием
for (int k = log U; k >= 0; --k):
  Диницу на ребрах: $c_e \ge f_e+2^k$.

$Time_{Dinic} \le VE + V\cdot\underbrace{\sum k_d}_{\le O(E)} = O(VE)$

$Time_{Alg} = O(VE\log U)$

Теорема Карзанова $\quad\forall c_e\in\mathbb{Z}.\quad$ # фаз Диница $\le$?

Th. # фаз $\le 2\sqrt{C}$. $\quad$ „пропускн. сп. вершины" $c[v]=\min(c_{in}[v], c_{out}[v])$
$c_{in}[v]=\sum_{(u,v)\in E} c_{(u,v)} \quad c_{out}[v]=\sum_{(v,u)\in E} c_{(v,u)}$

□ Сделаем $\sqrt{C}$ фаз алг. Диница. $\rho(s,t)\ge\sqrt{C}+1$
f_0 — после $\sqrt{C}$ фаз

Rem. C = const. $c_{in}[v]$=const $c_{out}[v]$=const.
□ $c'_{in}[v]=\sum(c_{uv}-f_{uv})=\sum c_{uv}=c_{in}[v]$

$C=\sum_{v\ne s,t} c[v]$

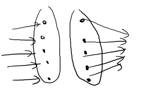
f^* — max поток в сети
(f^*-f_0) — поток в G_{f_0} величины $|f^*|-|f_0|$
#путей$\cdot\sqrt{C}\le \sum_p \underbrace{|p|}_{\ge\sqrt{C}} = \#\{(p,v) \mid p\text{-путь } s\to t,\ v\in p\} = \sum_{v\ne s,t}\alpha_v$ (*)
Декомпозируем на единичные потоки-пути
Длины всех этих путей $\ge\sqrt{C}$ - (не учит. s,t) $\quad \alpha_v$ = # путей, кот. проходят через v.
путей $\cdot\sqrt{C} \overset{(*)}{\le} \sum_{v\ne s,t}\alpha_v \le \sum_{v\ne s,t} c[v] = C$ => # путей $\le\sqrt{C}$
За $\forall$ фазу Диниц пускает ≥ 1 путь => осталось фаз $\le\sqrt{C}$.

Lm $\forall c_e=1$. Тогда фаза Диница работает за $O(E)$.
□ $O(E+d\cdot k_d)$ ребро потрогаем ≤ 2 раз: ≤ 1 раза пустим (т.к. сразу насыщ.), ≤ 1 раза выкинем

$Time_{\text{фазы}}=O(E)$

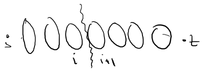
Следствие. (1) $\forall c_e=1$. Алг. Диница работает за $O(E\sqrt{E})$.
□ фаза: $O(E)$. # фаз $\le O(\sqrt{C})$ $\qquad C=\sum_{v\ne s,t} c[v] \quad \sum c[v]\le 2E$

(2) Задача макс. паросоч. $\quad O(E\sqrt{V})$.
$\forall c[v]=1$, $v\ne s,t$ $\quad C\le V$



Алгоритм Хопкрофта-Карпа

Th.2 # фаз $\le 2\cdot U^{1/3}V^{2/3}$, $\quad U=\max c_e$.
Д-во. Запустим первые k фаз.
Слоистая сеть из $\ge k+1$ слоя.



разрез: $(V_{\le i}, V_{>i})$ $\quad C(V_{\le i},V_{>i})\le |V_i|\cdot|V_{i+1}|\cdot U$

$\min_{i=0}^{d_t} C(V_{\le i},V_{>i}) \le \frac{|V|^2}{d_t^2}\cdot U \le \frac{|V|^2 U}{k^2}$

$\sum|V_i|=n$
$\min(|V_i|\cdot|V_{i+1}|)\to\max$
достиг. когда все $|V_i|=\frac{n}{d_t}$

Осталось фаз $\le \frac{|V|^2 U}{k^2}$. Всего фаз $k+\frac{V^2U}{k^2}\to\min$

$k=\frac{V^2U}{k^2} \Rightarrow k^3=V^2U \Rightarrow k=V^{2/3}U^{1/3}$.