Потоки.

Rem. В алг. Диница $\forall$ фаза работает за $O(VE)$.

$$Time = \sum_{\text{фазы}} (E + \underbrace{d \cdot k_d}_{\#\text{путей длиной } d}) = O(VE + V\underbrace{\sum k_d}_{O(VE) \text{ по ЭК}})$$

$d \cdot k_d = O(VE)$ на $\forall$ фазе

$\forall$ путь блокирует ≥ 1 ребро, новых рёбер в тек. фазы не появл.
(насыщает) $\Rightarrow k_d \leq E$

Длина пути $\leq V \Rightarrow k_d \cdot d \leq VE$

Глобальный разрез (min)

1). $V \cdot Flow$ $O(E^2)$

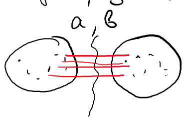
2). Штор-Вагнер $O(V^3)$ или $O(V(E + V\log V))$

3). Каргер-Штейн

$\forall c_e = 1$

① Алгоритм Каргера

Каждый раз стягиваем случ. ребро, пока не останется 2 вершины



— кандидат в min разрезы

$k = \min \deg v$. $Ans \leq k$. $E = \frac{1}{2}\sum \deg v \geq \frac{1}{2} kV$

$$\Pr_{e \leftarrow U(E)}[e \in Cut] = \frac{|Cut|}{E} \leq \frac{k}{\frac{1}{2}kV} = \frac{2}{V}$$

$$\Pr\{\text{ни разу не попали в ребро } Cut\} \geq \left(1 - \frac{2}{V}\right)\left(1 - \frac{2}{V-1}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{(V-2)}\,\cancel{(V-3)} \dots (1)}{V(V-1)\cancel{(V-2)} \dots \cdot 3} = \frac{2}{V(V-1)} = \Pr[\text{успеха за одну фазу}]$$

Повторим $O(V^2)$ раз $\to$ Pr успеха = const $Time = O(\underbrace{V^2}_{\#\text{фаз}} \times (\underbrace{V}_{\#\text{стяг.}} \cdot \underbrace{V}_{\text{время на стяг.}})) = O(V^4)$

② Алгоритм Каргера-Штейна

$KS(G)$: $|V(G)| = V_0$

1). делать случайные стягивания, пока $|V| > \frac{|V_0|}{\sqrt{2}}$

$$\Pr\{\text{не испортили}\} \geq \frac{\cancel{(V_0-2)}\cancel{(V_0-3)} \cdot \cancel{\dots} \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} - 2\right)}{V_0(V_0-1) \cancel{\dots} \cancel{\left(V_0/\sqrt{2}\right)}} = \frac{\left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} - 1\right)\left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} - 2\right)}{V_0(V_0 - 1)} \approx \frac{1}{2}$$

2). Вызовем $KS(G)$ дважды

$$T(V) = \underbrace{V^2}_{1).} + \underbrace{2T\left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right)}_{2).} = O(V^2 \log V)$$

$\Pr\{\text{успеха } KS \text{ на } V \text{ верш.}\} = q_k$, $k = \log_{\sqrt{2}} V$ $V = (\sqrt{2})^k$ $P(V)$ $P(k)$ $k = \log_{\sqrt{2}} V$

$q_k \geq \frac{1}{2} \cdot (1 - (1 - q_{k-1})^2)$ $\boxed{\text{Lm. } q_k \overset{?}{\geq} \frac{1}{k+2}}$

$\Pr\{\text{усп. на } V \text{ верш.}\} \geq \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} V + 2}$

Повторим $O(\log V)$ раз $\Rightarrow \Pr\{\text{успеха}\} = const$

$Time = O(V^2 \log^2 V)$

$(1 - q_{k-1})^2 \leq \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^2 = \frac{k^2}{(k+1)^2}$

$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{k^2}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)^2 - k^2}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2(k+1)^2} \overset{?}{\geq}$

$\geq \frac{1}{k+2}$

$(2k+1)(k+2) \geq 2(k+1)^2$

$2k^2 + 5k + 2 \geq 2k^2 + 4k + 2$