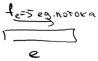
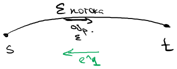
Потоки мин. стоимости   min cost flow

c_e, f_e, w_e – стоимость пропуска потока по e ($\in\mathbb{R}$)



$+f_e \cdot w_e$

$5 w_e$



$$W(f) = \sum_{e \in E} f_e \cdot w_e$$
(прямых)

У обр. ребер e $w_e := -w_{e \wedge 1}$

$w(v,u) = -w(u,v)$

$f_e \mathrel{+}= \varepsilon$

$f_{e\wedge 1} \mathrel{-}= \varepsilon$

$W \mathrel{+}= w_e \cdot \varepsilon$

Задача: найти поток f величины k min cost.   (min cost k-flow)
$|f| = k$ $W(f) \to \min$

] $c_e \in \mathbb{Z}$, в G_{f_0} нет отрицательных циклов.
(рассм. только ненасыщ. ребра)

$f_0(v,u) = 0 \quad \forall v,u$

(*) Алгоритм: k раз ищем кр. путь $s \to t$ с помощью Ford-Bellman за $O(VE)$,
(длина ребра $= w_e$)
пускаем единицу потока.

Lm. $|f| = k$. $W(f) = \min$ (среди потоков вел. k) $\iff \nexists$ отр. цикла в G_f.

Д-во. $\boxed{\Rightarrow}$ отр. цикл. есть $\Rightarrow$ пустим по нему поток $\Rightarrow$ стоимость уменьшится (?!)

$\boxed{\Leftarrow}$ $|f^*| = k$, $W(f^*) = \min < W(f)$

$|f^* - f| = 0$ $W(f^* - f) = W(f^*) - W(f) < 0$ s t

$(f^* - f)$ – циркуляция в G_f, декомпозируем её на циклы

$(f^* - f) = c_1 + c_2 + \ldots + c_i$ $0 > W(f^* - f) = \sum_{j=1}^{i} W(c_j) \Rightarrow \exists c_j : W(c_j) < 0$

c_j – цикл. отр. стоим. в G_f.   (?!)

■

Th. Алгоритм (*) корректен.

Д-во по индукции по $|f|$. База: $|f| = 0$. – нет отриц. циклов по условию.

Переход. f^*_{k+1} – min cost $(k+1)$-flow

f_k – наш поток величины k $W(f_k) = \min$ по предп. инд. $\Rightarrow$ в G_{f_k} нет отр. циклов

$(f^*_{k+1} - f_k)$ – поток величины 1 в G_{f_k}. Декомпозиция: 1 путь p ($s \to t$) + набор циклов $c_1, \ldots, c_i$

$W(f^*_{k+1}) \geq W(f_k + p)$ ← путь $s \to t$

$W(c_1), W(c_2), \ldots, W(c_i) \geq 0$.
т.к. это циклы в G_{f_k}.

$f_{k+1} = f_k + (\text{кр. путь } s \to t)$

$W(f_{k+1}) \leq W(f^*_{k+1}) \to \min$.

■

Rem.] f – min среди потоков вел. $|f|$.
p – кр. путь $s \to t$. $0 \leq x \leq \min_{e \in p}(c_e - f_e)$. $(f + xp)$ – min cost поток

Д-во. f^* – min cost поток такой величины. $f^* - f$. – декомпозируем: пути и неотр. циклы.
Длина (вес) любого пути $\geq W(p)$
$\Rightarrow W(xp) \leq \sum W(d_i p_i) \quad \Rightarrow W(f^*) \geq W(f + xp)$.

■

Метод потенциалов Джонсона

$w'_e = w_e + \varphi_a - \varphi_b$ пути $s \to t$ $w'_{e\wedge 1} = -w_e + \varphi_b - \varphi_a = -w'_e$
$e = (ab)$ $w'(p) = w(p) + \varphi_s - \varphi_t$

$\forall a \in V$] $\varphi_a = \rho(s,a) \Rightarrow w'_e = w_e + \rho(s,a) - \rho(s,b) \overset{?}{\geq} 0$

$\rho(s,a) + w_{(ab)} \geq \rho(s,b)$ – нер-во Δ.

FB(s)
$\forall v$ $\varphi_v = \rho(s,v)$.
G_0
for $i = 1..k$ G_{i-1}
Dijkstra(s) $\to$ d, path $_{s \to t}$
  for $e \in$ path
    e.f += 1, (e^1).f −= 1, W += e.w;
  G_i
  $\forall v$ $\varphi_v \mathrel{+}= d[v]$
  G'_i

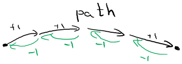
$w_e + d_a = d_b \Rightarrow w'_e = w_e + d_a - d_b = 0$
e лежит на кр. пути

$w_e + \varphi_a - \varphi_b$

$\Rightarrow$ e на кр. пути $s \to t$ в G_{i-1},
то $w_e = 0$

$w_{e \wedge 1} = -w_e = 0$

path



Time = $O(VE + k \cdot \text{Dijkstra})$