

# Mincost

Что делать с отр. циклами?

mincost  
циркуляция

Алг. Клейна: while находим отр. цикл: пускаем по нему поток

$$c_e, w_e \in \mathbb{Z} \quad W(f) \downarrow \text{ на } \geq 1$$

$$|W(f)| \leq E \cdot \underbrace{U}_{\max c_e} \cdot \max w_e$$

$$\text{Time} = O(VE^2 U \max w_e)$$

mincost k-flow:

I mincost цирк.  $|f|=0 \quad W(f) \rightarrow \min \Rightarrow$  отр. циклов нет

Далее ищем mincost k-flow в графе без отр. циклов

II Найдем любой поток  $f: |f|=k$  (напр., алг. Диница)  
Ищем mincost цирк. в  $G_f$ .

Mincost-циркуляция: полн. реш.

1 Будем искать не миним. отр. цикл, а цикл min среднего веса

$\exists$  отр. цикл  $\Leftrightarrow \exists$  цикл с средним весом  $< 0$ .

Алг. Карпа, кот. ищет цикл с. веса за  $O(VE)$

Итераций будет  $O(VE \log(V \cdot \max w_e))$

$$\text{Time} = O(V^2 E^2 \log(V \max w_e))$$

2 Capacity Scaling

Изначально  $\forall c'_e = 0$ .

$c_e$  - правильные проп.сп.

$c'_e$  - текущие

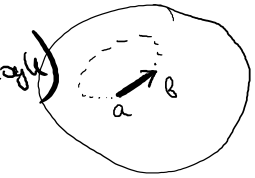
for  $k = \log U \dots 0$

for  $e \in E: // e: a \rightarrow b$

if  $c_e$  содержит бит номер  $k$ :

$G \rightarrow$

$p$ -крат. путь  $b \rightarrow a$  (в ост. сети)



ост. проп.сп.:  $\underbrace{c'_e - c_e}_{> 0}$

$G' \rightarrow$

$$c'_e + 2^k$$

$f \rightarrow$

if  $W(p) + w_e < 0$ :

$f' \rightarrow$

пропустим по циклу  $p \cup \{e\}$   $2^k$

пересчитаем потенциалы для Дейкстры

$e \in e$ :

отриц. циклов нет  $\Rightarrow W(f) = \min \Rightarrow$  ничего не делаем

УТВ. После (\*) поток оптимален ( $W(f') = \min$ ).

От противного.  $f^*$ -опт.  $(f^* - f)$ -цирк. в  $G'_f$ . Декомп. её на единичн. циклы.

Все отр. циклы проходят через  $e$ . (укаже  $\exists$  отр. цикл до увелич. проп.сп., т.е. в  $G'_f$ )

$$0 \geq W(\text{цикла}) \geq w_e + W(p)$$

# отр. циклов  $< 2^k$   
(отн.  $\geq 1$  из ост. проп.сп.  $e$ )



$$\Rightarrow \sum W(\text{циклов}) \geq 2^k \cdot (w_e + W(p))$$

$$|f^* - f| \geq 2^k \cdot (w_e + W(p))$$

$$|f' - f| = 2^k \cdot (w_e + W(p)) \Rightarrow |f'| \leq |f^*| \quad (!?)$$