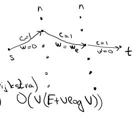
Задача о назначениях

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\quad \pi \in S_n$ $\quad \sum a_{i\pi_i} \to \min$

сов. п/соч min веса



• с помощью min cost n-flow:

нет циклов в исходном графе $\Rightarrow \text{Time} = O(V \cdot \text{Dijkstra})$

$O(V^3)$ $\quad O(V(E + V\log V))$

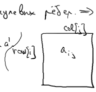
• Венгерский алгоритм

<u>Зам.</u> Пусть все $a_{ij} \geq 0$, M состоит только из нулевых рёбер. $\Rightarrow M$ - min cost.

<u>Зам.</u> $\exists\, a'_{ij} = a_{ij} + \text{row}[i] + \text{col}[j]$

$\Rightarrow$ mincost M для a совпадает с mincost п/с для a'

$W_{a'}(M)\ \sum_{i=1}^{n} a'_{i\pi_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi_i} + \sum_{i=1}^{n} \text{row}[i] + \sum_{j=1}^{n} \text{col}[j]$



$x := \min a_{ij} : i \in A^+, j \in B^-$

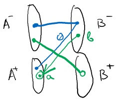
$\forall i \in A^-$ $\quad \text{row}[i] += x$

$\forall j \in B^-$ $\quad \text{col}[j] -= x$

	B^-	B^+
A^-	$\varnothing$	$+x$
A^+	$-x$	$\varnothing$

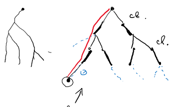
$\}+x$

$\underbrace{\qquad}_{-x}$



$\Rightarrow a'_{ij}$ в $A^+ \times B^-$

$\exists\, i \in A^+, j \in B^- : a'_{ij} = 0$

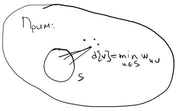


Все рёбра в дереве должны об. веса 0

Все рёбра в M - тоже

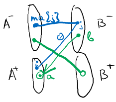
Свободн. рёбра дерева: $\in A^+ \times B^+$

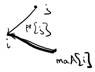
рёбра M: $\underbrace{\notin A^+ \times B^-}_{+}$, $\underbrace{\notin A^- \times B^+}_{+}$




```
for v∈A:                                   O(V) итер.
   A⁺ = {v}; B⁻ = ∅
   for j∈B:
      d[j] = a[v][j] + row[v] + col[j]

 while True:                               O(V) итер.
 (1) (x, i, j) = min{ (d[j], i, j) | j∈B⁻, i∈A⁺
                                     i:w(i,j) = d[j] }
 (2) for a∈A⁻: row[a] += x
 (3) for b∈B⁻: col[a] -= x; d[b] -= x
     // i→j
     j → B⁺, pr[j] = i  // удаляем j из d
     if maB[j] == -1:   // j - своб.
        применяем ДЧП v → j
        break           // maA[..], maB[..]
     else:
        maB[j] → A⁺
        for b∈B⁻:
 (4)       d[b] = min(d[b], a[maB[j]][b] + row[maB[j]] + col[b])
```





j pr[j] maA[pr[j]] pr[...] ..

• $\text{Time} = O(V^3)$ — priority queue = массив

• Куча Фиб.: (4) : $O(V \cdot E \cdot \text{decreaseKey}) = O(VE)$

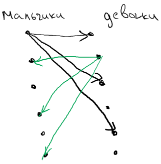
(1) : $O(V^2) \cdot \text{getMin} = O(V^2 \log V)$

(2) : храним общее прибавление к A^-

(3) : храним общ. пр. к B^-

$\text{Time} = O(VE + V^2 \log V) = O(V \cdot \text{Dijkstra})$

<u>Marriage problem</u> (Stable matching)

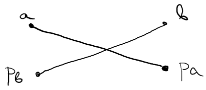


$\forall a \in L$ $\quad bs[a]$ = упорядоч. список девочек по убыв. приоритета

$\forall b \in R$ $\quad as[b]$ = — " — мальчиков

Стабильное паросочетание

Нестабильность:



мальчик у a: $b \succ_a P_a$

дев. b : $a \succ_b P_b$

<u>Алгоритм</u> „мальчики предлагают, девочки отказываются"

Изначально $\forall a \in L$ $\; P_a = bs[a].\text{top}()$

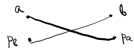
$\forall b \in R$ если есть ≥ 2 предложивших $(a: P_a = b)$ $\to$ отказываем всем, кроме лучшего

Если мальчику a отказали, $bs[a].\text{pop-front}()$

$P_a = bs[a].\text{top}()$

1). списки $bs[..]$ уменьшаются $\Rightarrow$ алгоритм конечен

2). алг. корректен



$\Rightarrow b$ отказала a

$\Rightarrow P_b \succ_b a$ (?!)

3). $\text{Time} = O\left(\sum_{i \in L} |bs[i]| + \sum_{j \in R} |as[j]|\right)$ $\quad \forall b \in R$ поддерживаем $s[b]$ = список предложивших

<u>Классификация рёбер двуд. графа</u>

$NO = \{e \in E \mid \nexists \max \text{Matching} \ni e\}$

$MUST = \{e \in E \mid \forall \max M \ni e\}$

$MAY = \{e \in E \mid \exists \max M \ni e,\ \exists \max M \not\ni e\}$

$\exists M$ - max Matching

Найдём MAY.

$MUST = M \setminus MAY$

$NO = \overline{M} \setminus MAY$

<u>Lm.</u> $e \in MAY \Leftrightarrow \exists P$ — чер. путь чётной длины либо цикл (чётный) отн. $M : e \in P$

<u>Д-во</u> $\boxed{\Rightarrow}$ $e \in MAY$

M' - max Matching: $M' \oplus M \ni e$. $\quad M' \oplus M$ — чётные пути и циклы

$\boxed{\Leftarrow}$

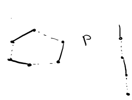
P — ЧП четн. длины или чер. цикл

$M \oplus P$ — max Matching

$e \in P$. $\quad e \in M \to e \notin M \oplus P$

$e \notin M \to e \in M \oplus P \quad \Rightarrow e \in MAY$

■



Алг.: четные пути — dfs Куна из свободн. верш. обеих долей

a и b — в одной КСС G

Дано max Matching $\Rightarrow O(V+E)$ классиф. рёбра.