Игри на графах

(1) Несимметричн. игра:

Игроки ходят по очереди

G – ориентированный. Фишка стоит на $v \in V$

v: • [проигрышная для 1/2 игрока
ходы, возм. разные для 1/2 игрока – рёбра $v \to u$;

Если игрок не может сделать ход $\Rightarrow$ он проиграл

(2) Симметричн. игра:

– ходы у вершины для двух игроков одинак.
– проигрыш $\Leftrightarrow$ нет хода

Представим (1) как (2):

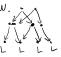
1). если вершина проигр. для i-го игрока, удалим рёбра i-го игрока

2). $v \to (v,1)$, $(v,2)$ $(v\,u)$ $(v,1)\to(u,2)$, $(v,2)\to(u,1)$

Позиции: $r(v)$
– выигрышные W – у начинающего A в этой позиции $\exists$ стратегия: $\forall$ ходов другого игрока A выигрывает
– проигрышные L – наоборот
– остальные – ничейные D //будут бесконечно ходить по графу

Lm. Если у v все ходы в $W \Rightarrow r(v)=L$
Если у v $\exists$ ход в $L \Rightarrow r(v)=W$

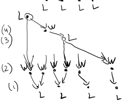
(1) Ациклический граф
Идём в обратном тополог. порядке и расставл. L/W.
(ленивая динамика)



(2) Граф с циклами – ретроанализ
dfs/bfs

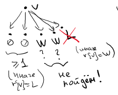
$\forall v\ cnt\{v\} = deg_{\to}(v)$

```
queue = мн-во стоков; ∀r{v}=0, r[сток]=L
while !queue.empty():
  v = q.pop()
  for (uv) ∈ E
    if r{v} == L :
      if !r{u}: r{u}=W, q.push(u), d{u} = d{v}+1
    else:
      --cnt{u}; if !cnt{u}: r{u}=L, q.push(u), d{u}=d{v}+1
```



Lm. $r\{v\}=0 \Rightarrow r(v)=D$

Д-во

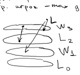


$\forall v: r\{v\} \underset{0}{=}$ $\exists (vu)\in E: r\{u\}=0$.

Будем ходить по $0 \Rightarrow D$.

Длина игры $len((G,v))$ = #ходов в игре, если выигрыв. игрок min число ходов до выигрыша, проигр. игрок – max до проигр.

Lm. $len((G,v)) = d\{v\}$ $\forall v: r\{v\}\neq 0$



Сумма игр

2 игрока

$(G_1,v_1)+(G_2,v_2)$

$G(V_1\times V_2,\ E=\{((u_1,u_2)(u_1',u_2)) \mid u_1,u_1'\in V_1,\ u_2\in V_2\ (u_1,u_1')\in E_1\}$

$\cup\ \{((u_1,u_2)(u_1,u_2')) \mid \ldots\}$

Ретроанализ: $|V_1|\cdot|V_2| + |E_1|\cdot|V_2| + |E_2||V_1|$

Игра Ним

$\forall$ ход – взять у 1 кучки взять любое число >0

$n=1$: $a_1=0 \Rightarrow L$, $a_1\neq 0 \Rightarrow W$

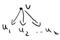
$n=2$: $a_1=a_2 \Rightarrow L$, $a_1\neq a_2 \Rightarrow W$

$n=3$?

$a_1\oplus a_2\oplus\ldots\oplus a_n = 0 \Leftrightarrow$ позиция проигрышная

$g((G,v))$ – функция Гранди (Шпрага–Гранди), G – ациклический

$g(v)=mex\{g(u_1),g(u_2),\ldots,g(u_k)\}$



minimum excluded

$mex\{a_1,\ldots,a_k\} = \min x\geqslant 0: x\notin\{a_1,\ldots,a_k\}$

$mex\{1,2,4,7\}=0$ $\quad mex\ \varnothing = 0$

$mex\{0,1,2,4,7\}=3$

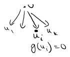
Пример. $*i$ – Ним на 1 кучке с i камнями
$g(*i)=i$

Th. $g((G_1,v)+(G_2,u)) = g((G_1,v))\oplus g((G_2,u))$

Lm. $g(v)=0 \Leftrightarrow r(v)=L$

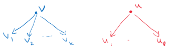
Д-во **Lm.** Индукция по обр. топ. порядку.
База. Сток v. $r(v)=L$.
$g(v)=0$

Переход. 1). $g(v)\neq 0$.
$\Downarrow$
$0\in\{g(u_1),\ldots g(u_k)\}$
$\exists u_i\ g(u_i)=0 \Rightarrow r(u_i)=L$
$\Downarrow$
$r(v)=W$



2). $g(v)=0$
$\forall u_i\ g(u_i)>0 \Rightarrow r(u_i)=W \Rightarrow$
$\Rightarrow r(v)=L$

Д-во Thm. $g((G_1,v)) =: a$ $\quad g((G_2,u)) =: b$



(v,u)
(*) $mex\{g(G_1,v_1)\oplus b,\ g(G_1,v_2)\oplus b,\ \ldots,\ g(G_1,v_k)\oplus b,$
$a\oplus g(G_2,u_1),\ \ldots,\ a\oplus g(G_2,u_l)\} \overset{?}{=} a\oplus b$

$(v,u)\to\underbrace{(v_1,u)}$
$g((G_1,v_1)+(G_2,u)) =$
$= g(G_1,v_1)\oplus b$

$A=\{g(G_1,v_1),\ldots,g(G_1,v_k)\}$ $\quad 0,1,2,\ldots,a-1\in A$
$a\notin A$
$>a\ \in\!\!\!\!/\ A$

B $\quad 0,1,\ldots,b-1\in B$
$b\notin B$ $\quad >b\ \in\!\!\!\!/\ B$

$mex\{0\oplus b, 1\oplus b,\ldots,(a-1)\oplus b,(>a)\oplus b,$
$\overset{z}{=}$ $a\oplus 0, a\oplus 1,\ldots,a\oplus(b-1),\ a\oplus >b\} \overset{?}{=} a\oplus b$

1). $a\oplus b\notin Z$ (excluded) $\quad a\oplus y$, $x\oplus b$ $\quad y\neq b \Rightarrow a\oplus y\neq a\oplus b$
$x\neq a \Rightarrow x\oplus b\neq a\oplus b$

2). $0,1,\ldots,(a\oplus b)-1\in Z$?
$z\leq a\oplus b-1$
$z< a\oplus b$
$\to \begin{cases} z=a\oplus y & y=0..b-1\\ z=x\oplus b & x=0..a-1\end{cases}$

2^0

a	0 1 0 0 1 1 0 1 1 0
b	1 0 1 1 1 0 1 0 1 0
$a\oplus b$	1 1 1 1 0 1 1 1 0 0
z	1 1 1 0 1 1 0 1 1 1
b'	1 0 1 0 0 0 0 0 0 1

$b'=a\oplus z$

Первая позиция различия с $a\oplus b$

$b'<b$, т.к. первый измен. бит: $1\to 0$
$y=b'$ – подходит $a\oplus b'=z$

```
dfs(v):
  if g[v] is not None: return g[v]
  used.assign(MAX_MEX, 0)          ++cc;
  for (vu) ∈ E:                    если > deg v +1 -> можно не записывать
     used[dfs(u)] = 1               = cc;
  for (x=0;  used[x]; ++x);        used[x]==cc
  g[v] = x
```

Time $=O(V+E)$ $\quad$ Mem $=O(V+MAX\_MEX)$
1). $MAX\_MEX \leq \max \deg v$
2). $MAX\_MEX\leq\sqrt{2E}$.

$(G_1,v)\simeq(G_2,u) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall$ игры C $\quad r((G_1,v)+C) = r((G_2,u)+C)$

$A\simeq B,\ C\simeq D \Rightarrow A+C\simeq B+D$

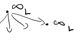
(G,v) ациклич. $\quad$ **Th.** $\exists!\, x: (G,v)\simeq *x;\quad x=g(G,v)$

G – с циклами

1). 

2). 

$K=\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$



$*i+*j = *(i\oplus j)$
$*i+\infty_K = \infty_{K\oplus i}$
$\infty_K+\infty_L = \infty_\varnothing$

Проигр. $\Leftrightarrow *0$
Выигр. $\Leftrightarrow \infty_K, K\ni 0$
Ничейная $\Leftrightarrow \infty_K, K\not\ni 0$