$ILP \in NPh \leftarrow prob$

$LP \in P$

$LP(prob)$

вершины $\in \mathbb{Z}$

Simplex

$\mathbb{R}$

?

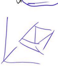
C-OPT

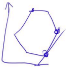
Approx

Def. Полиэдр целый

1) вершины – $\mathbb{Z}$ политоп

2) уравнения $\mathbb{Z}$





VC

$y: V \to \{0, \cancel{1\}}\ \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\forall (v,u) \in E: \ y(v) + y(u) \geq 1$ $\quad \geq 1$

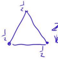
$\sum\limits_{v} y(v) \to \min$

VC'

$y: V \to \mathbb{R}_+$

$\forall (v,u) \in E \quad y(v) + y(u) \geq 1$

$\sum y(v) \to \min$



$\mathbb{Z}: 2$

$\mathbb{R}: 3/2$

$\frac{4}{3}$

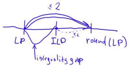
$\frac{ILP}{LP} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$

Прибл. решение:

y — решение LP.

$(ILP: \ \{v \mid y(v) = 1\})$

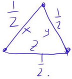
$\{v \mid y(v) \geq \frac{1}{2}\}$



2-OPT VC

Политоп паросочетаний

$$\sim 2^n \begin{cases} x: E \to \cancel{\mathbb{Z}_+}\ \mathbb{R}_+ \\ \forall v: \sum\limits_{e \in \delta(v)} x(e) \le 1 \\ \sum\limits_{e \in E} x(e) \to \max \end{cases}$$



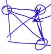
$\mathbb{Z}: 1$

$\mathbb{R}: 3/2$

Полученный политоп $\mathbb{Z}$ $\overset{\text{TODO}}{\Longleftrightarrow}$ G – двудольный

G – не двудольный :(

$\forall U \subseteq V, |U| = \text{odd}: \sum\limits_{e \in \langle U \rangle} x(e) \le 1/2(|U|-1)$



$(1/2; 1/2; 1/2)$

$x + y \le 1$

$y + z \le 1$

$x + z \le 1$

$x + y + z \le 1$

Целый политоп 2-дольного паросочет.

Def. A - Totally Unimodular

$\det(B) = \{\pm 1, 0\}$

$\boxed{A \quad \begin{matrix} \pm 1 \\ 0 \end{matrix}}$

$\underline{\text{Утв}_1}$: $\{Ax \le b,\ x \ge 0\}$, A - Т.У., $\forall b \in \mathbb{Z}^m \Rightarrow$ полиэдр целый

$\underline{\text{Утв}_2}$: $\{\underline{Ax = b}, x \ge 0\}$, A - Т.У, $\forall b \in \mathbb{Z}^m \Rightarrow$ полиэдр целый

$\underline{\text{Утв}_3}$: если $\{Ax \le b, x \ge 0\}$ - целый $\underline{\forall b \in \mathbb{Z}^m} \Rightarrow A$ - Т.У.

:(

$\text{Утв}_{\underline{2}} \Rightarrow \text{Утв}_{\underline{1}}$.

$\{x \mid \underline{Ax \le b, x \ge 0}\}$ $\Updownarrow$ целый

$\Uparrow$

$\{(x, s) \mid \underline{Ax + E \cdot s = b}, x \ge 0, s \ge 0\}$ ← целый

$\{Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ — целый, A — т. и.

$\underline{x} \to$ b.f.s. $(x, \underline{B})$

$$x = \begin{pmatrix} A_B^{-1} \cdot b \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{?}{\in} \mathbb{Z} \\ \in \\ \in \\ \in \\ \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

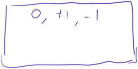
$$A_B^{-1} \cdot b$$

$$\| $$

$$\frac{\overset{\pm 1, 0}{A_B^{adj}}}{\underset{\pm 1}{\det(A_B)}} \cdot \overset{\in \mathbb{Z}}{b}$$

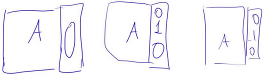
Достаточное условие на Т.У.

$\{A \mid A - \text{Т.У.}\}$

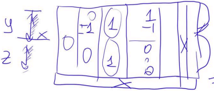


$A \to A^T$

$A \to (-1)A$



Дост. условие:



$\leftarrow A$

$\Rightarrow A - \text{Т.У.}$

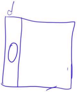
$\Uparrow$

$A - \text{У.}$

0, 1

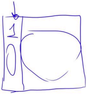
A - u.

а)



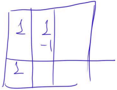
$\det(A)=0$

б)



$\det(A) \leftarrow \det(A^*)$

в)

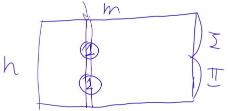


$\det = 0$

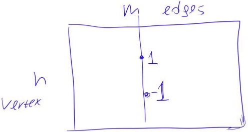
$$\sum_{i\in Y} A_i - \sum_{i\in Z} A_i = 0$$

$$\begin{cases} X: E \to \mathbb{R}_+ \\ \forall v: \sum\limits_{e \in \delta(v)} X(e) \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ Ax \le b \end{cases}$$

$A \overset{?}{=}$ т.у.



V политоп для двуд. паросоч.



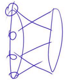
(все, $\emptyset$)

Поток / Циркуляция.

$$\begin{cases} f: E \to \mathbb{R}_+ \\ \forall v \in V: \sum\limits_{e \in \delta^{in}(v)} f(e) = \sum\limits_{e \in \delta^{out}(v)} f(e) \\ \boxed{f(e) \le c(e)} \end{cases}$$

Политоп Парасочетаний

Утв:
есть сов. паросочет.



$\deg v = d \ (\forall v)$

LP.

$x(e) = \frac{1}{d}$

$\Downarrow$

$\exists$ вершина x.

$\sum x(e) = n$

$$\begin{cases} x : E \to \mathbb{R}_+ \\ \forall v:\ x(\delta(v)) \le 1 \\ \sum x(e) \to \max \end{cases}$$

сов. паросочетание.

$\forall U \subseteq V;\ |U| = odd$

$x(\langle U \rangle) \le$

$\le \frac{1}{2}(|U| - 1)$

Полиэдральные М. в комб. опт.

нуж? TSP integrality gap

$$\begin{cases} E \text{ — ground set} \\ \mathcal{F} \subseteq 2^E \text{ — feasible set} \\ X \in \mathcal{F} \quad W(X) \to \max \end{cases}$$

$$W(X) = \sum_{e \in X} w(e)$$

$$f(\text{set}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{y \in \text{set}} f(x)$$

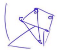
$$P = \{ \operatorname{conv}(\chi(X)) \mid X \in \mathcal{F} \}$$

$$X \in \mathcal{F} \;\to\; \chi(X) \in \{0,1\}^{|E|}$$

$$\operatorname{Conv}(x_1, \dots, x_k) = \left\{ y = \sum \lambda_i x_i ,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

1) почему полиэдр?

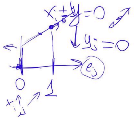
$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1 \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum \lambda_i \cdot x_i$$



2) вершины – ?

2а) все исходные (•) – вершины.

$(x_i \in \{0, 1\}^{|E|}$



25) нет других

$$V = \sum \lambda_i x_i \qquad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1$$

$\exists i: \lambda_i = 1$

$\underline{\exists i, j}$

$\lambda_i > 0 \quad \pm \text{eps}$

$\lambda_j > 0 \quad \pm \text{eps}$

Двойственность

18:20

$$A \leq A^*$$

Эллипсоиды

Двойственность

$L \in NP$

$L \in coNP$

$L \in NP \cap coNP \Rightarrow L \in P$

Лемма Фаркаша

A: $n \times m$

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ — несовместна если } \Longleftrightarrow \exists y: \begin{cases} b^T y < 0 \\ A^T y \geq 0 \end{cases}$$

"$\Leftarrow$"

$Ax = b$ $\quad y$: $[\ ]_n$

$(Ax)^T y = b^T y$

$\quad \| \qquad\qquad \Rightarrow \nexists x$

$x^T (A^T y)$

пусть y: $b^T y < 0$

$A^T y \geq 0$

"$\Rightarrow$"

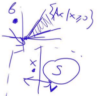
$K = \{Ax \mid x \geq 0\}$

(P) - совместна $\Longleftrightarrow b \in K$.

пусть $b \notin K$

$$\begin{cases} \langle b, z \rangle < 0 \\ \langle k, z \rangle \geq 0, \ k \in K \end{cases}$$

$\forall i \quad \langle Ae_i, z \rangle \geq 0$



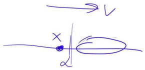
$\langle x, v \rangle < \alpha$

$\langle y, v \rangle \geq \alpha$

$\forall y \in S$

$b \notin K \Longleftrightarrow \exists z$:

$$\begin{cases} b^T z < 0 \\ A^T z \geq 0 \end{cases}$$


v
x
2

Двойственность.

(P) Primal
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x \to \max \end{cases}$$

(D) Dual
$$\begin{cases} A^T y \geq c \\ b^T y \to \min \end{cases}$$

$$Ax = b$$
$$(Ax)^T y = b^T y$$
$$x^T (A^T y) = b^T y$$
$$\underset{c^T x}{\underset{\parallel}{x^T c}} \leq b^T y$$

$$\boxed{A^T y \geq c}$$

Th о слабой двойственности
$$c^T x \leq b^T y$$

$$\le$$
$$c^T x \qquad b^T y$$

$$\underbrace{\max_x c^T x}_{P} \overset{\leq}{=} \underbrace{\min_y b^T y}_{D}$$

Следств:

P - unbounded $\Rightarrow$ D - infeasible

D - unbounded $\Rightarrow$ P - infeasible

Th о сильной двойственности.

Если у любой из двух программ $\exists$ opt решение, то и у другой тоже и $opt(P) = opt(D)$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ — несовм } \iff \exists y: \ A^T y \geq 0, \ b^T y < 0$$

Д-во.

$\exists$ opt решение у D: $opt(D) = \beta$

$$P_\beta \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \cancel{c^T x \to \max} \\ c^T x \geq \beta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c^T x - s = \beta, \quad s \geq 0$$

P_β — совместна

Пусть не так:

$$P_\beta: \quad \begin{array}{cc} m & s \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline c^T & -1 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array}$$

$$\exists \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} < 0$$

$$b^T y + \beta \lambda < 0$$

$$\begin{pmatrix} A^T y + c\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \geq 0 \iff \begin{pmatrix} A^T & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} A^T y + c\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \geq 0 \qquad b^T y + \beta\lambda < 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\begin{cases} A^T y \geq 0 \\ b^T y < 0 \end{cases}$$

$$\lambda < 0 \qquad \frac{1}{(-\lambda)} > 0$$

$$\begin{cases} A^T y + c\lambda \geq 0 \\ b^T y + \beta\lambda < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^T \cdot \frac{y}{-\lambda} \geq c \\ b^T \frac{y}{-\lambda} < \beta \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} A^T y \geq c \\ b^T y \to \min \end{cases}$$

Двудольные паросоч.

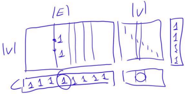
$$(P)\begin{cases} x: E \to \mathbb{R}_+,\ s: V \to \mathbb{R} \\ \forall v:\quad x(\delta(v)) + s(v) = 1 \\ x(E) \to \max \end{cases}$$

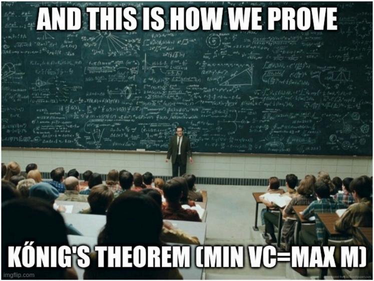
$$(D)\begin{cases} y: V \to \mathbb{R}_+ \\ \sum\limits_{v \in V} y(v) \to \min \\ \forall (v,u) \quad y(v) + y(u) \geq 1 \\ \cancel{\forall v: \ y(v) \geq 0} \end{cases}$$

Vertex Cover

$$(P)\begin{cases} x \geq 0 \\ Ax = b \\ c^T x \to \max \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} A^T y \geq c \\ b^T y \to \min \end{cases}$$

$$n \overset{m}{\boxed{A}} \qquad \boxed{y}\ n$$




AND THIS IS HOW WE PROVE
KŐNIG'S THEOREM (MIN VC=MAX M)
imgflip.com

(P) | (D)

$x_1 \dots x_m$ | $y_1 \dots y_n$

$x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow (=)$ | $y_i \in \mathbb{R}$

$x_i \in \mathbb{R}_+$ | $y_i \in \mathbb{R}_+$

$x_i \in \mathbb{R}_-$ | $y_i \in \mathbb{R}_-$

$c^T x \to max/min$ | $b^T y \to min/max$

$Ax \gtreqless b$ "=" $\Rightarrow \in \mathbb{R}$, "≤", "≥" | $A^T y \gtreqless c$ "=", "≤", "≥"

n $\boxed{A}$ m

$\pm$ ≥ ≤

условия:	$\varphi \to max$	$\varphi \to min$
good	$\leq$	$\geq$
bad	$\geq$	$\leq$

good: $x \geq 0$

bad: $x \leq 0$

$$\begin{cases} x: V \to \mathbb{R}_+ & \text{good} \\ x(\delta(v)) \le 1 & \leftarrow \text{good} \\ x(E) \to \max \end{cases}$$

$$\begin{cases} y: E \to \mathbb{R}_+ \\ \forall (v,u) \in E: \ y(v) + y(u) \geq 1 \\ \sum y(e) \to \min \end{cases}$$

$b^T y \to \min$

$A^T y \geq c$

0) $LP \in NP \cap coNP$

1) $\frac{TDI}{TU}$

2) Max M

(Сжатие соцветий)

$\Longrightarrow$ Max Weighted Matching