

# Вопросы к экзамену по алгоритмам

## СПБ ВШЭ, 1 курс, весна 2020

### Общая информация

- Кроме конспектов полезно смотреть **разборы** задач из практик и дз.
- *Курсивом* помечено то, что было разобрано на практике.
- (a) *основные* темы.
- (b) *обычные* темы.
- (+) факультативные темы (на оценку 10).

### DFS

- (a) 1. DFS. Компоненты сильной связности. Конденсация.
- (a) 2. DFS. Эйлеров цикл. Эйлеров путь. Случай ориентированного и неориентированного графа.
- (a) 3. DFS. Мосты, точки сочленения.
- (a) 4. DFS. Двусвязность, вершинная, рёберная. Определение через отношение эквивалентности. Алгоритм со стеком.
- (a) 5. DFS. 2-SAT.

### Теория сложности, рандомизированные алгоритмы

- (a) 6. Неразрешимость Halting Problem. Понятие Decision, Search задачи, языка. Определения DTime, P, EXP. Следствие  $P \neq EXP$  из теоремы об иерархии по времени.
- (a) 7. Классы NP, coNP, coNEXP. Примеры: k-CLIQUE, MAX-CLIQUE, HAM-PATH, PRIME, coPRIME, IS-SORTED.
- (a) 8. Классы NP-hard, NP-complete, полиномиальное сведение. Сведение по Куку.  $BN \in NP-complete$ .
- (a) 9. Задачи максимизации; search  $\rightarrow$  decision; search 3-SAT  $\rightarrow$  search k-IND. Решение NP задач.
- (a) 10. Машина Тьюринга. RAM-машина. Другое определение класса NP. Понятие строгой-нестрогой полиномиальности.
- (b) 11. Теорема об иерархии по времени. Доказательство через диагонализацию.
- (a) 12. Сведения  $BN \rightarrow CIRCUIT-SAT \rightarrow SAT \rightarrow 3-SAT$ .
- (a) 13. Сведения  $3-SAT \rightarrow k-IND \rightarrow k-CLIQUE \rightarrow VERTEX-COVER$ .
- (a) 14. Классы RP, coRP, связь с классом NP. Класс ZPP. Понижение ошибки. Формулировки трёх гипотез.
- (a) 15. Задачи: поиск невычета, тест Ферма, тест Миллера Рабина, частый элемент, 3-LIST-COLORING, matrix multiplication testing.
- (a) 16. Теорема  $ZPP = RP \cap coRP$ . Вложение классов.
- (b) 17. Класс BPP. Понижение ошибки.
- (a) 18. Парадокс дней рождений, анализ вероятности в две стороны.
- (a) 19. Алгоритм Полларда за  $\mathcal{O}(n^{1/4})$  арифметических операций.
- (a) 20. Решение 3-SAT. Детерминированный алгоритм  $1.73^n$ , рандомизированный за  $1.5^n$  (с доказательством). Приближенный алгоритм для MAX-3-SAT.
- (a) 21. Лемма Шварца-Зиппеля (формулировка). Матрица Татта и поиск совершенного паросочетания.
- (a) 22. Применение случайных чисел. Идеальное кодирование. Вычисление средней зарплаты без разглашения, доказательство гамильтонового пути без разглашения.
- (a) 23. Random shuffle массива. Игра на 0-1-дереве, min-max-игра на дереве.
- (+) 24. Квадратный корень по простому модулю за  $\mathcal{O}(\log p)$ .

## Графы

- (a) 25. Поиск в ширину. Решение очередью. *Вещественный 0-1 bfs*. Структура кратчайших путей.
- (a) 26. Решение для 0-k BFS, 0-1 BFS на деке.
- (a) 27. Поиск в ширину за  $\mathcal{O}(\frac{V^2}{w})$ . 1-k bfs за  $\mathcal{O}(E \log k)$ .
- (a) 28. Дейкстра. Алгоритм. Доказательство. Решение за  $\mathcal{O}(E \log V)$ ,  $\mathcal{O}(V^2 + E)$ ,  $\mathcal{O}(E + V \log V)$ . Ситуация с отрицательными рёбрами.
- (a) 29. Идея потенциалов. Применение для APSP.
- (a) 30. Алгоритм  $A^*$ . Доказательство для графов с неравенством треугольника. Сравнение с Дейкстрой. Когда  $A^*$  лучше?
- (a) 31. Флойд. Решение за  $\mathcal{O}(V^3)$ . Корректность.
- (a) 32. Флойд. Поиск отрицательных циклов. *Транзитивное замыкание* за  $\mathcal{O}(\frac{V^3}{w})$ .
- (a) 33. Форд-Беллман. Переход к линейной памяти. Восстановление пути.
- (a) 34. Форд-Беллман. Оптимизации: random-shuffle, break, очередь.
- (b) 35. Форд-Беллман и отрицательные циклы. Поиск, доказательство.
- (b) 36. Поиск цикла минимального среднего веса. За  $\mathcal{O}(VE \log)$ , за  $\mathcal{O}(VE)$ .
- (a) 37. DSU. Постановка задачи и реализация на списках.
- (a) 38. DSU. Реализация деревьями. Две эвристики. Доказательство оценки  $\mathcal{O}(\log)$  для каждой эвристики.
- (b) 39. DSU. Доказательство  $\mathcal{O}(m + n \log^* n)$  для двух эвристик одновременно.
- (a) 40. MST. Лемма о разрезе. Краскал. Прим. Доказательства.
- (b) 41. MST. Борувка. Время работы  $\mathcal{O}(E \log(V^2/E))$ , доказательство.
- (a) 42. Алгоритм Йена на примере  $k$ -го пути.
- (+) 43. Гольдберг. Основная идея. Лечение одной вершины за  $\mathcal{O}(V + E)$ . Вывод асимптотики  $E\sqrt{V} \log C$
- (+) 44. Гольдберг. Лечение пачки из хотя бы  $\sqrt{k}$  вершин за  $\mathcal{O}(V + E)$ .

## Жадности и приближенные алгоритмы

- (a) 45. TSP. 2-ОПТ. 1.5-ОПТ. Не существует алгоритма если нет неравенства треугольника. Правило Варнсдорфа.
- (a) 46. Алгоритм Хаффмана, доказательство, реализация кучей. *Поиск кодов по массиву частот* за  $\mathcal{O}(\text{sort} + |\Sigma|)$
- (a) 47. Жадность. Задачи на сортировку. Способы доказательства, вывод компаратора. Примеры: непрерывный рюкзак, файлы на ленте, выполнить побольше задач с общим дедлайном.
- (a) 48. Жадность. Задания с дедлайнами: выполнить все за  $\mathcal{O}(n \log n)$ , выполнить максимум за  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- (b) 49. Жадность. Задания с дедлайнами: выполнить максимум. Решение за  $\mathcal{O}(n^2)$  и  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- (b) 50. Жадность. Задача про два (упорядоченных) станка.
- (a) 51. Partition. Жадное решение, LDM (Кармаркар-Карп). *PTAS-схема*.
- (b) 52. Knapsack. Проблема с приближением жадности, PTAS и FPTAS схемы.
- (a) 53. BinPacking. Ограниченность приближения. Алгоритмы First-Fit, Best-Fit. Decreasing версии. Решение в случае  $a_i \geq \epsilon$ , различных  $\leq k$ .
- (b) 54. BinPacking. PTAS-схема. Оставшаяся часть решения.
- (b) 55. Set Cover.  $\ln(n)$ -приближение во взвешенном случае. Реализация за линейное время в невзвешенном случае. 2-ОПТ приближение для Vertex Cover.
- (a) 56. Задача о надстроке. Простое жадное решение. 2-ОПТ через SetCover.

## Центроиды

- (a) 57. Центроидная декомпозиция: построение, минимум на пути.
- (a) 58. Центроидная декомпозиция: покраска вершин на расстоянии  $\leq d$ .

## Здесь мог быть коллоквиум

### Бинарные деревья поиска

- (a) 59. Определение BST, операции `add, del, prev, next, lower_bound`, использование списка и хеш-таблицы.
- (a) 60. AVL-дерево. Инвариант, типы вращений. `Add` и `Del`. Число вращений при `Add` и `Del`.
- (b) 61. AVL-дерево. *Merge* и *Split*.
- (a) 62. Общие идеи: BST и неявный ключ, BST и персистентность, запрос на отрезок BST-дерева.
- (a) 63. B-дерево. `Find`, `Add`, `Delete`.
- (b) 64. B-дерево. *Split*, *Merge*.
- (a) 65. Вариации B-дерева:  $B^*$ -дерево (подробно),  $B^+$  дерево, RB, AA.
- (a) 66. Два определения случайного дерева (RBST). Эквивалентность, оценка средней глубины вершины.
- (a) 67. Декартово дерево. Единственность дерева при уникальных  $y$ , связь со случайными деревьями. Операции `Split`, `Merge`.
- (a) 68. Декартово дерево. *Эффективная реализация Add, Delete*. Персистентные декартовы деревья без  $y$ .
- (a) 69. Splay-дерево. Три вида поворотов. Операции `Splay`, `Add`, `Del`, *Split*, *Merge*. Потенциал. Оценка всего, кроме операции `Splay`.
- (b) 70. Доказательство амортизированной оценки операции `Splay`.
- (a) 71. Splay и теорема о статической оптимальности. Гипотеза динамической оптимальности.

### Структуры данных

- (b) 72. Персистентные структуры данных: стек, очередь (через 5 стеков).
- (a) 73. Персистентный дек через Pairing. Персистентный массив (древесный подход).
- (a) 74. Skip-List. Операции `Find`, `Insert`, `Erase`, `Split`, `Merge`.
- (a) 75. Корневая декомпозиция. Статичная по массиву (с примером).
- (a) 76. Корневая декомпозиция через `Split/Merge`; `Split/Rebuild`. Примеры.
- (a) 77. Дерево отрезков. Реализация снизу.
- (a) 78. Дерево отрезков. Реализация сверху. Оценка на число посещённых вершин. Массовые модификации в дереве отрезков.
- (a) 79. Задачи на scanline: число точек в прямоугольниках; число прямоугольников, накрывающих точку.
- (a) 80. Динамическое дерево отрезков (два способа); сжатие координат. Применение для задач с scanline.
- (b) 81. Многомерные структуры. ДО из сортированных массивов, ДО из ДО, ДО из ДД. Трёхмерное ДО.
- (a) 82. *Площадь объединения прямоугольников*.
- (a) 83. Поиск  $k$ -й порядковой на отрезке. на  $\mathcal{O}(\log^3)$ ,  $\mathcal{O}(\log^2)$ ,  $\mathcal{O}(\log)$ .
- (+) 84. Персистентность через Fat Nodes.
- (+) 85. Техника Fractional Cascading.

### RMQ, LCA, LA

- (a) 86. Разреженные таблицы.
- (a) 87. Сведения  $\text{RMQ} \rightarrow \text{LCA} \rightarrow \text{RMQ} \pm 1$ . Решение задачи LCA за  $\langle \mathcal{O}(n \log), \mathcal{O}(1) \rangle$ .
- (a) 88. Решение задачи RMQ за  $\langle \mathcal{O}(n \log \log), \mathcal{O}(1) \rangle$ .
- (a) 89. Метод четырёх русских, решение RMQ и LCA за  $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$ .
- (a) 90. Двоичные подьёмы. Решение LCA, два способа (с одной двигающейся вершиной и с двумя). Решение LA.
- (a) 91. LCA в offline, алгоритм Тарьяна.
- (a) 92. Алгоритм Вишкина (решение LA за  $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(\log) \rangle$ ).
- (+) 93. LA: решение через ladders decomposition.
- (+) 94. LA: решение за  $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(1) \rangle$  через 4 русских.

## Другие древесные алгоритмы и структуры

- (a) 95. Heavy-Light Decomposition. Пример использования.
- (b) 96. Euler-Tour Tree. Операции Link, Cut, Check.
- (b) 97. Link-Cut дерево. Описание структуры, потенциал, оценка Expose.
- (b) 98. Link-Cut дерево. Оценка MakeRoot, *Link*, *Cut*.
- (+) 99. MST за линейное время в среднем.