Алгоритм Форда–Беллмана

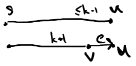
G, w_e – произвольные $\quad n=|V| \quad m=|E|$

① $d[k][v]$ – длина кр. пути $s \to v$, сост. из $\leq k$ рёбер.

④ Ответ: $\rho(s,v) = d[n-1][v]$ (если нет отр. циклов)

② Переходы

$$d[k][u] = \min\left(d[k-1][u], \min_{\substack{v:\\ (vu)\in E}} d[k-1][v] + w_{vu}\right)$$



③ Начальные значения

$k=0$

$$d[0][u] = \begin{cases} +\infty, & u \neq s \\ 0, & u = s \end{cases}$$

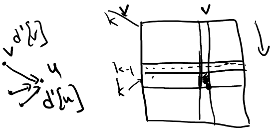
⑤
```
for k = 1..n-1
    for u = 0..n-1:  d[k][u] = d[k-1][u]
        for v,w in edges_in[u]:
            d[k][u] = min(d[k][u], d[k-1][v]+w)
```

$Time = O(nm) = O(VE)$
$Mem = O(n^2) = O(V^2)$

Улучшение 1:
```
for k=1..n-1
    for v=0..n-1:  d[k][v] = min(d[k][v], d[k-1][v])
        for u,w in edges[v]:
            d[k][u] = min(d[k][u], d[k-1][v]+w)
```

Улучшение 2:

```
d' = [+∞]*n
d'[s] = 0
for k=1..n-1
    for v=0..n-1
        for u,w in edges[v]:
            d'[u] = min(d'[u], d'[v]+w)
```



$Time = O(nm) = O(VE)$
$Mem = O(n) = O(V)$

Утв. После k-й итерации внешнего цикла в $d'[v]$ учтены все пути, сост. из $\leq k$ рёбер. В частности, $d'[v] \leq d[k][v]$.

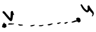
Rem $d'[v] \geq \rho(s,v)$ (всегда)

$s \to$ все остальные
$\forall v,u \quad \rho(v,u) = ?$

$w_e = 1 \quad O(V^2 + VE)$
$w_e \geq 0 \quad O(V^3 + VE)$ (на массиве)
$O(VE \log V)$
w_e-произв. $O(V^2E)$ – алг. ФБ
$O(V^3)$ – алг. Флойда–Уоршелла

Алгоритм Флойда – Уоршелла

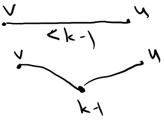
w_e – произв., $\rho(v,u) = ?\ \forall v,u$ (верш. нумер. с 0 до $n-1$)



① $d[k][v][u]$ – длина кратч. пути $v \to u$, если в качестве промежут. можно использ. только верш. с номерами $< k$.

④ Ответ: $\rho(v,u) = d[n][v][u]$

② $d[k][v][u] = \min(d[k-1][v][u],$
$d[k-1][v][k-1] + d[k-1][k-1][u])$



③ $k=0$

$$d[0][v][u] = \begin{cases} +\infty, & (vu) \notin E \\ w_{vu}, & (vu) \in E \end{cases} \quad (v \neq u)$$

$d[0][v][v] = 0$ (если нет отр. циклов)

⑤
```
for k=0..n-1:
    for v=0..n-1
        for u=0..n-1
            d[k+1][v][u] = min(d[k][v][u], d[k][v][k]+d[k][k][u])
```

$Time = O(n^3)$
$Mem = O(n^3)$

Улучшение:
(начальные знач.)

```
for k=0..n-1
    for v=0..n-1
        for u=0..n-1
            d[v][u] = min(d[v][u], d[v][k]+d[k][u])
```

$Time = O(n^3) = O(V^3)$
$Mem = O(n^2) = O(V^2)$

Утв. После k-й итерации в $d[v][u]$ учтены все пути, исп. в кач. промеж. верш. с номерами $\leq k$. $(k=0..n-1)$