

## 4 Сортировки и жадности

### 4.1 Практика

- Покажите, что любая сортировка сравнениями, которая верно работает хотя бы на доле  $\frac{1}{100^n}$  от всех перестановок, не может работать за  $o(n \log n)$  на всех тестах.

#### 2. Покрытие точек единичными отрезками

Дано  $n$  точек на прямой. Построить наименьшее множество отрезков, имеющих единичную длину, которые покрывают все данные точки.

#### 3. Выбор заявок

Дано  $n$  заявок — полуинтервалов  $[l_i, r_i)$ . Выбрать наибольшее число заявок, чтобы их полуинтервалы не пересекались.

#### 4. (\*) Жёсткие дедлайны

В фирму поступило  $n$  заказов, у каждого есть время исполнения  $t_i$  и жёсткий дедлайн  $d_i$ . В каком порядке и какие выполнять заказы, чтобы успеть **побольше**?

#### 5. Заказы и время конца

В фирму поступило  $n$  заказов, которые можно выполнять в произвольном порядке. На выполнение заказа  $i$  необходимо время  $t_i$ . В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Пусть  $e_i$  — момент окончания выполнения заказа номер  $i$ . Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать  $\sum_i e_i$ . Время  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

#### 6. Авторитеты

Есть  $n$  человек. Человек  $i$  готов примкнуть к нашей банде, если наш авторитет хотя бы  $a_i$ , при этом он к нашему авторитету прибавит  $b_i$ . Наш изначальный авторитет равен  $A$ .  $a_i, b_i, A \in \mathbb{Z}$ . Можем ли завербовать всех людей?  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

#### 7. (\*) Выбор заявок в маршрутке

Маршрутка совершает рейс от первой до  $n$ -й остановки. В маршрутке  $m$  мест для пассажиров. Есть  $k$  человек, про каждого заранее известно, что он хочет доехать от остановки  $s_i$  до  $f_i$ . Проезд для пассажира стоит 1 вне зависимости от расстояния между остановками. Максимизируйте прибыль, при условии, что можно выбирать, кого сажать в маршрутку на каждой остановке.  $n, m, k \leq 10^6$ .

#### 8. (\*) Идейная

Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма  $k$  и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  на  $i$ -м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой  $c_i$ . Определите за время  $\mathcal{O}(n)$ , как проехать  $n$  километров за минимальную стоимость.

#### 9. (\*) Подпоследовательности и сортировки

Даны скобочные последовательности из круглых скобок. в каком порядке их склеить, чтобы получилась правильная?

#### 10. (\*) Станки и сортировки

Имеется  $n$  деталей и два станка. Каждая деталь должна сначала пройти обработку на первом станке, затем — на втором. При этом  $i$ -ая деталь обрабатывается на первом станке за  $a_i$  времени, а на втором — за  $b_i$  времени. Каждый станок в каждый момент времени может работать только с одной деталью. Требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным.  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

#### 11. (\*) Докажите, что не существует рандомизированного (т.е. время работы зависит от случайности, но не корректность) алгоритма, который сортирует данные за $o(n \log n)$ в среднем.

## 4.2 Домашнее задание

1. (0.5) Докажите, что `extractMin` в куче не может работать за время  $o(\log n)$ .

Пояснение: нужно доказать, что невозможно написать функцию `extractMin` таким образом, чтобы время её работы было  $o(\log n)$ , где  $n$  — размер кучи. Требования на функцию `extractMin` следующие. Пусть у нас есть произвольный массив  $H$  с выполненным свойством кучи, имеющий минимум  $m$ . `extractMin` может менять  $H$ , но в конце должен оставить массив с выполненным свойством кучи, в которой на один элемент меньше — а именно, на элемент  $m$ . В конце работы `extractMin` возвращает  $m$ .

2. В свободное время Анка-пулемётчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке, как Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восьмёси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на  $k$ . Всего патронов  $n$ . Помогите Анке отсортировать патроны.

- (a) (0.5) Отсортируйте патроны за  $\mathcal{O}(nk)$ .
- (b) (0.5) Отсортируйте патроны за  $\mathcal{O}(n \log k)$
- (c) (1) Докажите нижнюю оценку на время сортировки  $\Omega(n \log k)$ .

3. (1) Белоснежка и гномы, которые не хотят спать

Даны  $n$  гномов. Если  $i$ -го гнома укладывать спать  $a_i$  минут, он потом спит  $b_i$  минут. Можно ли сделать так, чтобы в какой-то момент все гномы спали?  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

4. (1) Оцените время работы (в терминах  $\Theta$ ) детерминированного алгоритма поиска порядковой статистики (задача 4 из предыдущей практики), если вместо пятерок разбивать элементы на

- (a) (0.5) семёрки.
- (b) (0.5) тройки.

5. (+1.5) (\*) Степени и антиклики

Будем называть *независимым множеством* или *антикликой* подмножество попарно несмежных вершин графа. Пусть в графе  $G$  есть  $n$  вершин, а максимальная степень равна  $d$ . Найдите в нём независимое множество размера хотя бы

- a) (+0.75)  $\frac{n}{d+1}$  за время  $\mathcal{O}(n)$
- b) (+0.75) (\*)  $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v) + 1}$  за время  $\mathcal{O}(n \log n)$

Считайте, что граф уже дан в памяти в виде массива, где для каждой вершины хранится список её соседей.

6. (+0.75) (\*) Идейная

Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма  $k$  и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  на  $i$ -м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой  $c_i$ . Определите за время  $\mathcal{O}(n)$ , как проехать  $n$  километров за минимальную стоимость.