

4 Сортировки и жадности

4.1 Практика

1. Покажите, что любая сортировка сравнениями, которая верно работает хотя бы на доле $\frac{1}{100^n}$ от всех перестановок, не может работать за $o(n \log n)$ на всех тестах.
2. **Покрытие точек единичными отрезками**
Дано n точек на прямой. Построить наименьшее множество отрезков, имеющих единичную длину, которые покрывают все данные точки.
3. **Выбор заявок**
Дано n заявок — полуинтервалов $[l_i, r_i)$. Выбрать наибольшее число заявок, чтобы их полуинтервалы не пересекались.
4. (*) **Жёсткие дедлайны**
В фирму поступило n заказов, у каждого есть время исполнения t_i и жёсткий дедлайн d_i . В каком порядке и **какие** выполнять заказы, чтобы успеть **побольше**?
5. **Заказы и время конца**
В фирму поступило n заказов, которые можно выполнять в произвольном порядке. На выполнение заказа i необходимо время t_i . В каждый момент времени можно работать ровно над одним заказом. Пусть e_i — момент окончания выполнения заказа номер i . Распределите работу над заказами так, чтобы минимизировать $\sum_i e_i$. Время $\mathcal{O}(n \log n)$.
6. **Авторитеты**
Есть n человек. Человек i готов примкнуть к нашей банде, если наш авторитет хотя бы a_i , при этом он к нашему авторитету прибавит b_i . Наш изначальный авторитет равен A . $a_i, b_i, A \in \mathbb{Z}$. Можем ли завербовать всех людей? $\mathcal{O}(n \log n)$.
7. (*) **Выбор заявок в маршрутке**
Маршрутка совершает рейс от первой до n -й остановки. В маршрутке m мест для пассажиров. Есть k человек, про каждого заранее известно, что он хочет доехать от остановки s_i до f_i . Проезд для пассажира стоит 1 вне зависимости от расстояния между остановками. Максимизируйте прибыль, при условии, что можно выбирать, кого посадить в маршрутку на каждой остановке. $n, m, k \leq 10^6$.
8. (*) **Идейная**
Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма k и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на i -м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой c_i . Определите за время $\mathcal{O}(n)$, как проехать n километров за минимальную стоимость.
9. (*) **Подпоследовательности и сортировки**
Даны скобочные последовательности из круглых скобок. в каком порядке их склеить, чтобы получилась правильная?
10. (*) **Станки и сортировки**
Имеется n деталей и два станка. Каждая деталь должна сначала пройти обработку на первом станке, затем — на втором. При этом i -ая деталь обрабатывается на первом станке за a_i времени, а на втором — за b_i времени. Каждый станок в каждый момент времени может работать только с одной деталью. Требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным. $\mathcal{O}(n \log n)$.
11. (*) Докажите, что не существует рандомизированного (т.е. время работы зависит от случайности, но не корректность) алгоритма, который сортирует данные за $o(n \log n)$ в среднем.

4.2 Домашнее задание

1. **(0.5)** Докажите, что `extractMin` в куче не может работать за время $o(\log n)$.

Пояснение: нужно доказать, что невозможно написать функцию `extractMin` таким образом, чтобы время её работы было $o(\log n)$, где n — размер кучи. Требования на функцию `extractMin` следующие. Пусть у нас есть произвольный массив H с выполненным свойством кучи, имеющий минимум m . `extractMin` может менять H , но в конце должен оставить массив с выполненным свойством кучи, в которой на один элемент меньше — а именно, на элемент m . В конце работы `extractMin` возвращает m .

2. В свободное время Анка-пулемётчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке, как Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались несильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k . Всего патронов n . Помогите Анке отсортировать патроны.

- (a) **(0.5)** Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.
(b) **(0.5)** Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$.
(c) **(1)** Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

3. **(1) Белоснежка и гномы, которые не хотят спать**

Даны n гномов. Если i -го гнома укладывать спать a_i минут, он потом спит b_i минут. Можно ли сделать так, чтобы в какой-то момент все гномы спали? $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. **(1)** Оцените время работы (в терминах Θ) детерминированного алгоритма поиска порядковой статистики (задача 4 из предыдущей практики), если вместо пятерок разбивать элементы на

- (a) **(0.5)** семёрки.
(b) **(0.5)** тройки.

5. **(+1.5) (*) Степени и антиклики**

Будем называть *независимым множеством* или *антикликой* подмножество попарно несмежных вершин графа. Пусть в графе G есть n вершин, а максимальная степень равна d . Найдите в нём независимое множество размера хотя бы

- a) **(+0.75)** $\frac{n}{d+1}$ за время $\mathcal{O}(n)$
b) **(+0.75) (*)** $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v) + 1}$ за время $\mathcal{O}(n \log n)$

Считайте, что граф уже дан в памяти в виде массива, где для каждой вершины хранится список её соседей.

6. **(+0.75) (*) Идейная**

Машина тратит единицу топлива на километр, имеет бак объёма k и находится в начале прямой дороги в точке 0. Для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на i -м километре дороги есть заправочная станция со своей положительной ценой c_i . Определите за время $\mathcal{O}(n)$, как проехать n километров за минимальную стоимость.