

6 Динамика-2 и Хаффман

6.1 Практика

1. (!) За какое время работает этот код?

```
1 for S ⊆ {1, ..., n}:  
2   for T ⊆ S:  
3     cnt += 1
```

Как реализовать строчку 2 в этом псевдокоде?

2. (!) **Хроматическое число**

Дан граф матрицей смежности (в каждой ячейке квадратной матрицы записано есть ли такое ребро).

Посчитать минимальное число цветов вершин в правильной покраске графа. $\mathcal{O}(3^n)$.

3. **Разбиение на палиндромы**

Разбить строку на минимальное число палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$ времени.

- (a) $\mathcal{O}(n^2)$ памяти.
- (b) (*) $\mathcal{O}(n)$ памяти.

4. **Подпоследовательность-палиндром**

Дана строка длины n . Найти максимальную по длине подпоследовательность, которая является палиндромом. $\mathcal{O}(n^2)$.

5. **Свертка.** Дана строка из латинских букв длины n , нужно ее запаковать в максимально короткую, используя правило $n(S) = \underbrace{SS \dots S}_n$.

Пример: NEERCYESYESYESNEERCYESYESYES $\xrightarrow{n} 2(\text{NEERC3}(\text{YES}))$.

6. **Паросочетания**

Дан взвешенный неориентированный граф из n вершин. Найдите максимальное по весу паросочетание.

- (a) $\mathcal{O}(2^n n^2)$.
- (b) $\mathcal{O}(2^n n)$.

7. (!) **Set Cover**

Даны $A, B_1, \dots, B_m \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Выбрать минимальный набор $\{B_{i_j}\}: \bigcup B_{i_j} = A$. Чтобы везде можно было бесплатно применять битовую магию, предположим $n, m \leq 64$.

- (a) $\mathcal{O}(2^m \text{poly}(n))$.
- (b) $\mathcal{O}(2^m)$.
- (c) $\mathcal{O}(2^n m)$.

8. **Хаффман за $\mathcal{O}(n)$.**

Постройте код Хаффмана за $\mathcal{O}(n)$, если частоты букв уже даны в отсортированном порядке.

9. **Перевозка товаров**

Есть грузовик с заданной вместимостью, задача – перевезти n вещей с заданными весами со склада в магазин минимальным числом заездов.

- (a) $\mathcal{O}(3^n \text{poly}(n))$.
- (b) $\mathcal{O}(3^n)$.
- (c) (*) $\mathcal{O}(2^n n)$.

10. **Битоническая задача о коммивояжере**

Найдите во взвешенном графе гамильтонов цикл минимального веса, который удовлетворяет дополнительно следующему свойству: сначала номера посещенных вершин возрастают, а затем убывают. Время $\mathcal{O}(n^2)$

11. (*) **Пираты**

Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут a_i и время t_i , через которое пират прильвёт и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут a и угловая скорость вращения ω . Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $\mathcal{O}(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

6.2 Домашнее задание

- (1)** Есть ряд из N ($2 \leq N \leq 10000$) целых положительных чисел. Каждое число не превышает 200. Играют двое. За каждый ход можно зачеркнуть крайнее число. Зачеркнутое число добавляется к очкам игрока. Требуется счет первого игрока при оптимальной игре.
- (1)** Вам нужно распилить деревянный брус на несколько кусков в заданных местах. Распиловочная компания берет k рублей за распил одного бруска длиной k метров на две части. Понятно, что различные способы распила приводят к различной суммарной стоимости заказа. Определите минимальную стоимость распила бруса на заданные части. Вам дана длина бруска L , положения засечек, в которых нужно распилить брус $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < L$. Решить задачу за $\mathcal{O}(n^3)$.
- (2) Паросочетания**
Дан взвешенный неориентированный граф из n вершин. Найдите максимальное по весу паросочетание. Паросочетание – это множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.
 - (1)** $\mathcal{O}(2^n n^2)$.
 - (1)** $\mathcal{O}(2^n n)$.
- (1.5)** Дан невзвешенный неориентированный граф. Необходимо найти количество простых циклов в этом графе, то есть, таких замкнутых путей, которые не содержат повторяющихся вершин или рёбер.
 - (0.75)** $\mathcal{O}(2^n n^3)$.
 - (0.75)** $\mathcal{O}(2^n n^2)$.