8 Сильная связность и эйлеровость

Alles ist miteinander verbunden

Dark

8.1 Практика

1. (!) **Разминка**
   Пусть $C = (V_C, E_C)$ — компонента сильной связности графа $G = (V, E)$. Докажите, что C является сильно связным графом.

   (Иными словами, мы можем выкинуть всё снаружи C, и сильная связность не потеряется.)

2. (!) **2-Coloring**

   (a) Раскрасить вершины неориентированного графа в два цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов, или сказать, что это невозможно. $\mathcal{O}(V + E)$.

   (b) А теперь рёбра бывают двух типов: рёбра вражды означают, что вершины должны быть разных цветов, а рёбра дружбы означают, что вершины должны быть одного цвета.

3. (!) **2-List-Coloring**
   Есть граф и k цветов, для каждой вершины дан список из *двух* цветов, в которые её можно красить. Найти правильную покраску или сказать, что такой нет. $\mathcal{O}(V + E)$.

4. (!) **Эйлеров цикл в ориентированном графе**
   Найдите критерий (то есть необходимое и достаточное условие) того, что в ориентированном графе есть эйлеров цикл.

   Придумайте алгоритм для его нахождения.

5. (!) **451°**
   Дан ориентированный граф. Нужно построить пожарные станции в каких-нибудь вершинах.

   Едущая по вызову пожарная машина может игнорировать ориентацию рёбер. После выполнения задания у машины должна быть возможность вернуться на ту пожарную станцию, из которой она выехала, причём теперь нарушать ориентацию рёбер нельзя.

   Найдите минимальное число станций, которые достаточно построить, чтобы все вершины были в безопасности.

6. **Последовательность де Брёйна**

   (a) Найти гамильтонов цикл на графе бинарных строк длины n. Ребро между строками есть, если $(n-1)$-суффикс первой строки совпадает с $(n-1)$-префиксом второй строки.

   (b) Найти кратчайшую бинарную строку, содержащую все бинарные строки длины n в качестве подстрок.

7. **Нечётные вершины**
   Мы обсуждали, что чтобы найти эйлеров путь в графе с двумя нечётными вершинами, можно добавить фиктивное ребро между нечётными вершинами, запустить алгоритм поиска эйлерова цикла (`EC` для краткости) и удалить из ответа фиктивное ребро.

   (a) Объясните, почему можно не добавлять фиктивное ребро, а просто запустить `EC` на исходном графе из одной из нечётных вершин.

   (b) Приведите пример, когда запуск `EC` на таком графе из чётной вершины выдаст бессмыслицу.

   (c) Приведите пример, когда запуск `EC` на графе с более чем двумя нечётными вершинами даже из нечётной вершины выдаст бессмыслицу.
   (Что делать с такими графами, мы изучим в следующей задаче.)

8. **Почти эйлеровость**

   (a) Дополнить неорграф до эйлерова минимальным числом ребер. $\mathcal{O}(V{+}E)$.

   (b) Разбить все ребра неорграфа на минимальное число путей за $\mathcal{O}(V{+}E)$.

9. (*) **Транзитивное замыкание**
   Дан орграф, построить матрицу достижимости. $V \le 20\,000$, $E \le 200\,000$.

10. **Кластеризация на два кластера**
    Даны объекты, и матрица расстояний d_{ij} (непохожести объектов). Нужно разбить объекты на два множества так, чтобы максимальный из диаметров множеств был минимален.

    Пример объектов: точки на плоскости.
    Пример объектов: тексты и их расстояние Левенштейна.

11. (*) **3-List-Coloring**
    Есть граф и k цветов, для каждой вершины дан список из *трёх* цветов, в которые её можно красить. Найти правильную покраску или сказать, что такой нет. $\mathcal{O}(1.5^V E)$. Допускается ошибиться с вероятностью 10^{-9}.

12. **Радиостанции**
    Есть n радиостанций, изначально все выключены. Есть m заявок «включите радиостанцию i или j». Есть k ограничений «нельзя включать радиостанции i и j одновременно». Кроме того, у каждой радиостанции есть отрезок два параметра l_i и r_i ($0 \le l_i \le r_i \le F$).

    Нужно включить некоторые радиостанции и выбрать мощность f (вещественное число) так, чтобы выполнить все заявки, выполнить все ограничения, а также чтобы для всех включённых радиостанций выполнялось $l_i \le f \le r_i$. Если это невозможно, сообщить об этом.

    (a) $\mathcal{O}(n^2 + m + k)$.

    (b) $\mathcal{O}(F(n + m + k))$.

    (c) (*) $\mathcal{O}(n + m + k + F)$.

    (d) (*) $\mathcal{O}(n \log n + m + k)$.

8.2 Домашнее задание

1. (1) Дан ориентированный граф на n вершинах, такой, что исходящая степень каждой вершины равна единице. Найти за $\mathcal{O}(n)$ для каждой вершины, чему равно кратчайшее расстояние от неё до любой вершины, лежащей на цикле

2. (1) **Пути в дереве**
   Дано дерево $T = \langle V, E \rangle$.
   За $\mathcal{O}(V{+}E)$ вычислить для каждого ребра, сколько простых путей проходит через него.

3. (*) (+1) Корневое дерево T на V вершинах представлено массивом из V элементов. Все вершины пронумерованы, и для каждой вершины в массиве указан его родитель. Для корня r значение в массиве равно -1. Требуется определить, как будет выглядеть новое представление дерева, если корень r сменить на корень q. Разрешается использовать $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Менять массив можно. Время $\mathcal{O}(V)$.

4. (1) Дан ориентированный граф. За $\mathcal{O}(n{+}m)$ найти количество рёбер, которые надо добавить в него, чтобы все вершины стали достижимы из вершины с номером 1.

5. (1) **Разбиение на пути**
   Разбить все рёбра ориентированного графа на минимальное число путей. $\mathcal{O}(V + E)$.

   Подсказка: На какое минимальное число путей можно разбить эйлеров граф?

6. **(1) Провода**
   Есть n проводов. Есть круг из $2n$ разъемов, каждый разъем имеет тип от 1 до n (соответствующий номеру провода, который можно туда воткнуть), каждый тип встречается ровно два раза. У каждого провода есть цвет. В целях безопасности нельзя втыкать провода одинакового цвета в соседние разъемы. Найти способ соединить каждый из n проводов с одним из двух подходящих разъемов, не нарушив правила на цвета соседних. Время $\mathcal{O}(n)$.

7. **(1.5) Отрезки**
   Дано $n \leq 100$ отрезков на плоскости. Нужно у каждого выбрать ровно один конец так, чтобы минимальное расстояние между выбранными точками было максимальным.

   (a) **(0.75)** Отрезки не пересекаются, все расположены на прямой.

   (b) **(0.75)** Отрезки на плоскости, могут пересекаться.