

9 Bfs, Dijkstra, A-star

9.1 Практика

1. (!) 0 – 1 bfs

Пусть в графе есть ребра веса 0 и 1. Придумайте, как найти кратчайшее расстояние от вершины s до остальных за $\mathcal{O}(V + E)$.

2. Обмен местами

Есть ориентированный граф. Для каждой пары вершин a, b определена функция $f(a, b)$.

Вася и Петя стоят в вершинах v и p , соответственно, и хотят поменяться местами, не оказываясь ни в какой момент времени в паре вершин с $f(a, b) < d$. За какое минимальное число ходов они могут это сделать? Ход — один из них переходит в смежную вершину. $\mathcal{O}(VE)$.

3. (!) 0-k-bfs

Пусть в графе все рёбра имеют целый вес из $[0, k]$. Придумайте, как найти кратчайшее расстояние от вершины s до всех остальных.

(a) За $\mathcal{O}(k(V+E))$

(b) За $\mathcal{O}(kV + E)$

Аккуратно с нулевыми рёбрами. Можно сначала решить задачу без них.

4. Кратчайший путь через достопримечательности

Дан орграф. Найти кратчайший путь, проходящий по всем k выделенным вершинам. $k \leq 10$.

5. Дейкстра не работает для отрицательных весов

Рассмотрим версию алгоритма Дейкстры, которая в каждый момент поддерживает кучу вершин v от которых ещё нужно прорелаксировать расстояния. В каждый момент времени алгоритм достаёт вершину v что d_v минимально. Пусть в графе нет отрицательных циклов.

(a) Покажите как одна вершина может участвовать более одного раза в релаксации (т.е. вершина может снова войти в кучу после того, как её оттуда вынули).

(b) (*) Постройте пример, в котором этот алгоритм работает экспоненциальное время.

6. A-star и хорошая эвристика расстояния

Напомним что алгоритм A-star выбирает для релаксации вершину, минимизирующую $d_v + h(v)$.

Пусть $h(v) \leq \text{dist}(v, t)$. Докажите что алгоритм найдёт верный путь.

Поправка лекции: одну и ту же вершину можно доставать несколько раз, чтобы этого не было, нужно свойство консистентности (неравенства треугольника).

7. В орграфе есть бесплатные и K типов платных рёбер. Передвижение по любому ребру стоит 0, но, чтобы двигаться по платному ребру типа x , необходимо иметь пропуск того же типа. В любой момент времени можно иметь не более одного пропуска, однако в любой вершине есть возможность купить пропуск любого типа за A и продать пропуск любого типа за B ($0 < B < A$, цены одинаковы во всех вершинах). Найдите самый дешёвый способ добраться из вершины s до вершины t за $\mathcal{O}(K(V + E))$.

8. (*) Речной граф

Даны две параллельных прямых (река). В реке есть n островов (точек). Мы хотим провести по реке корабль, представляющий собой открытый круг радиуса R , так, чтобы он не задел ни одного острова. Найти максимальный R , при котором это еще возможно, за $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.