# 10 Bellman-Ford, Floyd-Warshall

## 10.1 Практика

1. **(!) Запросы к Роберту**
   Предподсчет за $\mathcal{O}(V^3)$ и запрос $\langle a, b, e\rangle$ за $\mathcal{O}(1)$ — существует ли кратчайший путь из $a$ в $b$, проходящий через ребро $e$?

2. **(!) Кратчайшие пути между всеми парами вершин**
   Пусть во взвешенном графе $G$ нет циклов отрицательной стоимости. Найти кратчайшее расстояние между всеми парами вершин (APSP).

   *Подсказка: замените веса рёбер $w_{v,u}$ на $w'_{v,u} = w_{v,u} + \varphi_u - \varphi_v$, где $\varphi$ некоторая функция (потенциал) связанная с кратчайшими путями.*

   Покажите, как найти матрицу расстояний в графе с отрицательными весами за $\mathcal{O}(VE\log V)$.

3. **(!) Транзитивное замыкание**
   Дан незвешенный ориентированный граф. Нужно построить его транзитивное замыкание: добавить наименьшее количество рёбер, так чтобы $(a, b) \in E; (b, c) \in E \implies (a, c) \in E$. Решить за

   (a) $\mathcal{O}(V^3)$.

   (b) (*) $\mathcal{O}(V^3/w)$.

4. **(!) Восстановление цикла**
   Мы доказали как проверить существование цикла в алгоритмах Беллман-Форда и Флойда. Опишите как восстановить сам отрицательный цикл. Докажите, что цикл который возвращает ваш алгоритм действительно отрицательный.

5. **Число кратчайших путей**
   Дан орграф, все $w_e > 0$. Дана стартовая вершина $s$, нужно для каждой вершины $v$ найти число кратчайших путей из $s$ в $v$. $\mathcal{O}(E\log V)$.

6. **Алгоритм не-Флойда**
   Рассмотрим изменённые версии алгоритма флойда где циклы идут не в порядке `kij`, а в порядке `ijk` или `ikj`. Для каждого из этих алгоритмов:

   (a) Докажите что он работает неверно (приведите пример)

   (b) (*) Забавный факт: если повторить алгоритм трижды (добавить внешний цикл повторяющий всё три раза), то получится верный ответ. Объясните почему.

7. **Откуда берутся графы?**
   Дана система из $m$ неравенств на $n$ переменных $x_i$.
   Каждое неравенство имеет вид $x_i - x_j \le \delta_{ij}$.

   (a) Найти решение системы или сказать, что его не существует, за $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

   (b) Пусть все $\delta_{ij} \ge 0$, решить задачу за $o(n \cdot m)$. Слишком просто? Тогда $\sum_i x_i \to \max$.

8. **Обмен валют**
   Есть $n$ валют и $m$ обменников. $i$-й обменник предлагает менять валюту $a_i$ на валюту $b_i$ по курсу $c_i/d_i$. Можно ли, используя сколь угодно большие начальные сбережения и данные $m$ обменников, сломать финансовую систему и бесконечно обогащаться? Считается, что у обменников есть бесконечное количество денег целевой валюты.

   (*) А теперь тоже самое с комиссией: $x_i$ единиц валюты $a_i$ перейдут в $(x_i - s_i)\frac{c_i}{d_i}$ единиц валюты $b_i$.

9. **Количество путей**
   Дан невзвешенный граф. Найти количество путей (необязательно простых)

a) между двумя фиксированными вершинами, длины не более $k$, за $\mathcal{O}(kE)$.
b) (*) между всеми парами вершин длины ровно $k$, за $\mathcal{O}(V^3 \log k)$.
c) (*) между двумя фиксированными вершинами, длины $\leq k$, за $\mathcal{O}(V^3 \log k)$.

10. **Расстояние – это не только сумма**
Для каждой пары вершин в графе найти $w[a, b]$ – такой минимальный вес, что из $a$ в $b$ есть путь по рёбрам, вес которых не больше $w[a, b]$. $\mathcal{O}(V^3)$.

## 10.2 Домашнее задание

1. **(1) Петербургские будни**
Дан ориентированный невзвешенный граф с выделенными вершинами $s$ и $t$. Перемещение по любому ребру занимает 1 единицу времени. В начальный момент времени мы стоим в вершине $s$. Рёбра – дороги. Идёт дождь с интенсивностью $L$ мм воды в секунду. У каждой дороги $e$ есть ограничение $C_e$ мм — уровень воды, при котором дорога перестаёт быть проходимой (мы дожны закончить движение по дороге не позднее момента достижения уровня $C_e$). Найдите за $\mathcal{O}((V+E)\log C)$ максимальное $L$, при котором все ещё существует возможность добраться от $s$ до $t$.

2. **(1.5) Дерево Штейнера**
Дан взвешенный неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$. Веса рёбер неотрицательны. В графе есть подмножество вершин $T$, которые мы назовем терминалами. Минимальное дерево Штейнера – это связный подграф графа $G$ минимального веса, содержащий все терминалы. Требуется найти такой подграф и доказать, что он является деревом.

   (a) **(0.5)** Доказать, что искомый подграф – дерево. (Чуть точнее: существует дерево, которое является связным подграфом минимального веса, содержащим все терминалы.)

   (b) **(0.5)** Пусть $|T| = 3$, решить за $\mathcal{O}(E \log V)$.

   (c) **(0.5)** Пусть $|T| = 4$, решить за $\mathcal{O}(V^3)$.

3. **(0.75) Расстояния в меняющемся графе**
Нужно научиться на запрос «уменьшился вес ребра» за $\mathcal{O}(V^2)$ пересчитывать матрицу расстояний. Считайте, что в графе не было и не появилось отрицательных циклов.

4. **(0.75) Количество путей**
Дан невзвешенный граф. Найти количество путей (необязательно простых) между двумя фиксированными вершинами, длины не более $k$, за $\mathcal{O}(kE)$.

5. **(+1) (*) bfs и длинная очередь**
Постройте матрицу $n \times n$, состоящую из клеток-стенок и пустых клеток, на которой при запуске `BFS` из какой-то клетки максимальный размер очереди будет $\omega(n)$. Ходить можно между клетками, смежными по стороне.

6. **(+1) (*) Форд-Беллман и число итераций**
Пусть на вершинах графа задан порядок: $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Пусть алгоритм Беллмана-Форда на каждой стадии рассматривает ребра в таком порядке: сначала ребра, ведущие из меньшей вершины в большую (в порядке возрастания номера исходящей вершины), а потом ребра, ведущие из большей вершины в меньшую (в порядке убывания номера исходящей вершины). Докажите, что если в графе нет циклов отрицательного веса, то алгоритм найдет все кратчайшие пути из $v_1$ за $\frac{n}{2}$ итераций.

7. **(+1) (*) Модульный граф**
Пусть длина пути определяется как сумма весов всех ребер по модулю $n$. Найти кратчайший путь (не обязательно простой) между заданными вершинами $s$ и $t$ за $\mathcal{O}((V+E) \cdot n)$.